N 973-8386-10-1

FIZICĂ

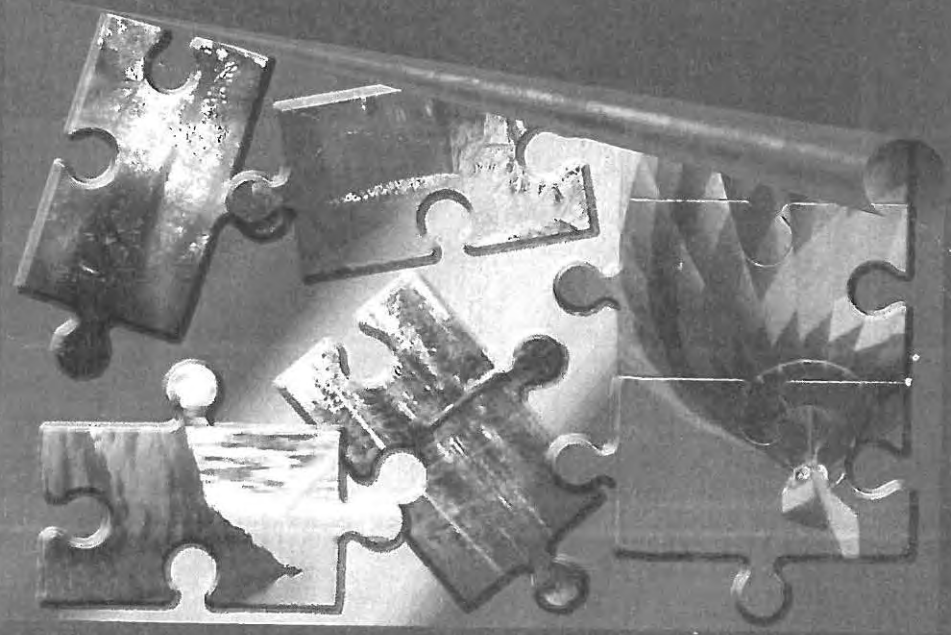
Manual pentru clasa a IX-a

manual pentru clasa a IX-a

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

DOINA TURCITU
MAGDA PANAGHIANU
MARIN ȘERBAN

FIZICĂ



EDITURA RADICAL

Editura **RADICAL**
Str. Tabaci, Nr.7
Craiova, Dolj, 200640
R.C. J16/667/2002; C.F. R14785213
Cont. RO32 RZBR 0000 0600 0253 7919
Banca: Raiffeisen Bank Craiova
Tel.: 0351.40.40.20, 0740.04.88.88
Fax: 0351.40.53.05
e-mail: editura@radical.ro
internet: www.radical.ro

Referenţi ştiinţifici: Prof. univ dr. Florea Uliu - Univ. din Craiova
Lect. univ. dr. George Stoenescu - Univ. din Craiova

Director editorial: George Turcitu

Tehnoredactare: Camelia Alexandrescu şi Cristian Oagănă

Copertă, grafică şi design: Camelia Alexandrescu

Corectură: Simona Turcitu

Toate drepturile asupra prezentei ediţii aparţin Editurii **RADICAL**. Nici o parte din acest volum nu poate fi copiată fără permisiunea scrisă a Editurii **RADICAL**.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
TURCITU, DOINA
Fizică: manual petru clasa a IX-a: Doina Turcitu, Magda Panaghianu, Marin Şerban; ref. şt.: prof. univ. dr. Florea Uliu, lect. univ. dr. George Stoenescu; ed.: George Turcitu Craiova, Radical, 2004.

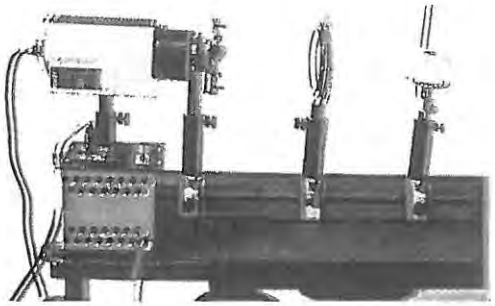
ISBN 973-8386-10-1

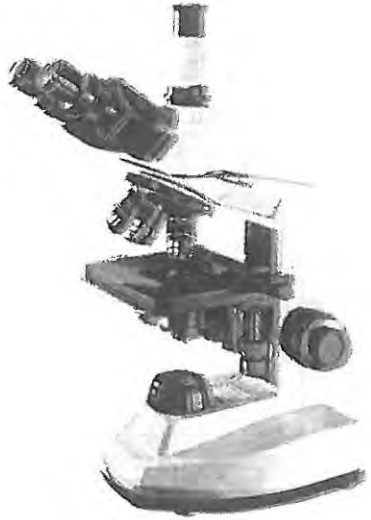
I. Panaghianu, Magdalena
II. Şerban, Marin
III. Uliu, Florea (ed.)
IV.Stoenescu, George (ed.)
V. Turcitu, George (ed.)

53(075.35)

1

OPTICA GEOMETRICĂ





PRINCIPIILE OPTICII GEOMETRICE

Optica studiază lumina şi fenomenele luminoase (natura şi proprietăţile ei, modul de producere, legile propagării, modul de interacţiune cu substanţa).

Optica geometrică studiază legile propagării luminii şi formării imaginilor optice, având la bază principiile opticii geometrice, făcându-se abstracţie de natura luminii.

Principiile opticii geometrice au fost stabilite direct, în urma a numeroase observaţii şi experimente, efectuate de-a lungul timpului asupra fenomenelor luminoase.

Principiul propagării rectilinii a luminii

Dacă între un paravan opac (exemplu: un perete fig. 1.1) şi o sursă de lumină este aşezat un corp opac atunci pe paravan se formează *umbra* corpului respectiv.

Pământul şi Luna, fiind luminate de Soare, formează în partea opusă Soarelui câte un *con de umbră*.

Fig. 1.1

Când o regiune din suprafaţa Pământului intră în conul de umbră al Lunii, în acea regiune are loc o eclipsă de Soare (fig. 1.2).

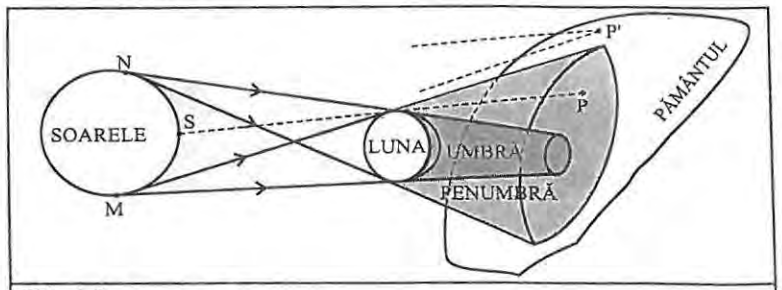


Fig. 1.2

Ce porţiune din Soare vede un observator situat în P? Dar unul situat în P'?

Regiunea în care nu ajunge deloc lumina este *umbra*, iar în jurul ei se formează *penumbra*.

Formarea umbrei şi penumbrei, formarea imaginilor prin instrumentele optice, alinierea obiectelor prin vizare precum şi alte fenomene asemănătoare au la bază *principiul propagării rectilinii a luminii*:

Într-un mediu transparent şi omogen lumina se propagă în linie dreaptă.

În vid şi în aer lumina se propagă cu viteza de 300 000 km/s. În alte medii viteza de propagare a luminii este mai mică.

Direcţia de propagare a luminii poate fi reprezentată printr-o *rază de lumină*.

Raza de lumină este un model folosit în optica geometrică pentru descrierea fenomenelor luminoase.

Daţi exemple de alte modele folosite în studiul fizicii în gimnaziu.

Un *fascicul de lumină* se poate reprezenta printr-un grup de raze de lumină. Dacă razele de lumină sunt concurente într-un punct ele formează un *fascicul conic*.

Un fascicul conic este: *divergent* când razele sale pleacă din vârful conului (fig. 1.3.a); *convergent* când sensul razelor este spre vârful conului (fig. 1.3.b); fasciculul este *paralel* dacă razele sunt paralele (fig. 1.3.c).

Sursele de lumină dau de obicei fascicule divergente, condensatorii aparatelor de proiecţie dau fascicule convergente, fasciculul emis de un laser este paralel.

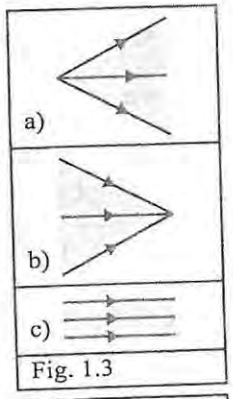


Fig. 1.3

Principiul independenţei fasciculelor de lumină

Dacă două sau mai multe fascicule de lumină se intersectează, fiecare se propagă independent de acţiunea celorlalte (figura 1.4), adică:

Drumul unei raze de lumină este independent de acţiunea altor raze.

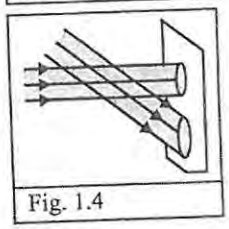


Fig. 1.4

Principiul reversibilităţii drumului razelor de lumină

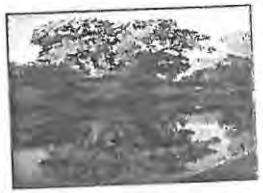
Experimental se constată că drumul parcurs de lumină între două puncte date nu se schimbă dacă se mută izvorul luminos dintr-un punct în celălalt, adică:

Drumul unei raze de lumină nu depinde de sensul ei de propagare.

1.1 REFLEXIA ŞI REFRACŢIA LUMINII

Majoritatea obiectelor sunt vizibile deoarece ele *reflectă* lumina, o parte din lumina reflectată ajungând la ochiul nostru.

O carte aflată pe o masă într-o încăpere luminată de o singură sursă punctiformă de lumină poate fi văzută din orice parte a camerei deoarece ea reflectă lumina în toate direcţiile.



Suprafaţa unei ape liniştite reflectă o parte din lumina care cade pe ea; aşa se explică de ce copacii de pe mal se văd în apa unui lac liniştit ca într-o oglindă.

Cu toate acestea doar o mică parte din lumină este reflectată, cea mai mare parte pătrunde în apă, modificându-şi brusc direcţia de propagare, adică *se refractă*.

Aşa se explică de ce un obiect scufundat în apă pare să fie mai aproape de suprafaţa apei decât este în realitate, de ce un creion introdus în apă pare rupt în regiunea suprafeţei de separare dintre aer şi apă (fig. 1.5).

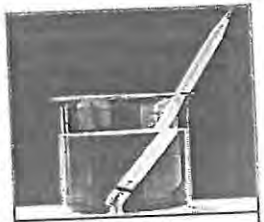
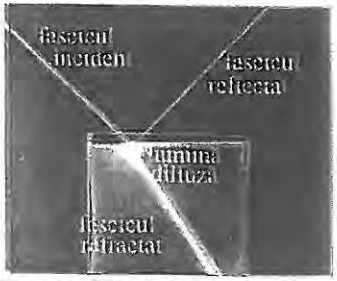


Fig. 1.5

În imaginea de mai jos se observă un fascicul subțire de lumină care întâlnește suprafața de separare dintre aer și apa aflată într-un vas transparent.



O "parte" din lumină se reîntoarce în primul mediu; lumina se reflectă pe suprafața apei ca pe o oglindă.

Reflexia luminii este fenomenul de întoarcere a luminii în mediul din care a venit, când întâlnește suprafața de separare dintre două medii.

O "parte" din lumină trece în apă și se refractă.

Refracția luminii este fenomenul de schimbare a direcției de propagare a luminii la trecerea dintr-un mediu transparent în alt mediu transparent.

O "altă" parte din lumină este împrăștiată pe suprafața apei, formând o pată luminoasă (fenomenul de *difuzie* a luminii).
În general orice suprafață difuzează mai mult sau mai puțin lumina. De exemplu: Pe o suprafață de hârtie obișnuită (suprafață cu asperități) lumina se reflectă practic în toate direcțiile (fig. 1.6), în timp ce pe o suprafață metalică lustruită, nichelată sau argintată lumina se reflectă într-o singură direcție. Desigur există și în acest caz lumină difuzată, însă este atât de slabă încât practic nu este observată.

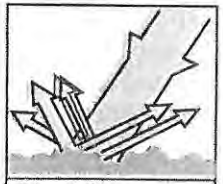


Fig. 1.6

1.1.1 LEGILE REFLEXIEI

O rază incidentă SI întâlnește o suprafață reflectătoare într-un punct I, numit *punct de incidență* (fig. 1.7).

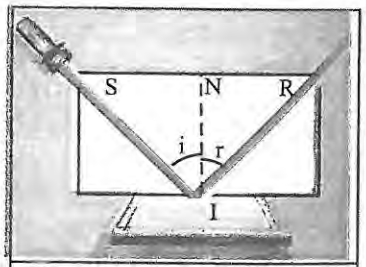


Fig. 1.7

Perpendiculara la suprafață dusă prin punctul de incidență o numim *normala* IN.
Raza IR este *raza reflectată*.
Direcțiile razelor se precizează prin unghiurile pe care le formează cu normala: $\sphericalangle i = \sphericalangle SIN$, numit *unghi de incidență* și $\sphericalangle r = \sphericalangle NIR$, numit *unghi de reflexie*.

Folosind un montaj asemănător cu cel din fig. 1.7 realizați un experiment prin care să verificați **legile reflexiei:**

1) Raza incidentă, normala în punctul de incidență și raza reflectată sunt în același plan.
2) Unghiul de reflexie are aceeași măsură cu unghiul de incidență.

$$\boxed{\sphericalangle r \equiv \sphericalangle i} \qquad (1.1)$$

Aplicând legile reflexiei explicați formarea unei imagini în oglinda plană.

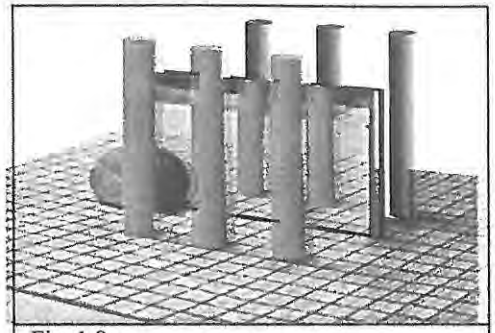


Fig. 1.8

Observație:
➢ Imaginea unui obiect dată de o oglindă plană este *virtuală* (se formează la intersecția prelungirilor razelor reflectate) și dreaptă.
Imaginea și obiectul sunt simetrice față de oglindă (fig. 1.8).

OGLINZI SFERICE

O oglindă sferică este o suprafață reflectatoare de forma unei calote sferice (fig. 1.9).

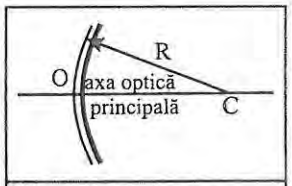


Fig. 1.9

Elementele unei oglinzi sferice:
- *centrul de curbură* (C) – centrul sferei din care face parte calota sferică;
- *raza de curbură* (R) – raza sferei din care face parte calota sferică;
- *vârful oglinzii* (O) – centrul calotei sferice;
- *axa optică principală* – dreapta ce trece prin centrul de curbură și prin vârful oglinzii.

Reflexia luminii într-o oglindă sferică respectă legile reflexiei, normala în punctul de incidență fiind raza sferei ce trece prin punctul respectiv.

Observație:

➢ Majoritatea oglinzilor sferice folosite în practică au dimensiuni mici comparativ cu raza lor de curbură. În această situație fasciculele de lumină sunt foarte puțin înclinate față de axa optică principală a oglinzii (*fascicule paraxiale*). În continuare vom considera aceste condiții îndeplinite.

O oglindă sferică este:

- *concavă* (fig. 1.10) dacă suprafața reflectatoare este pe interiorul calotei sferice;
- *convexă* (fig. 1.11) dacă suprafața reflectatoare este pe exteriorul calotei sferice.

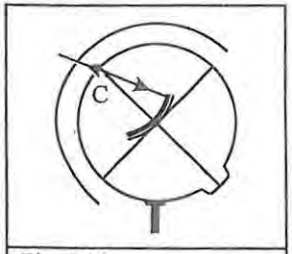


Fig. 1.10

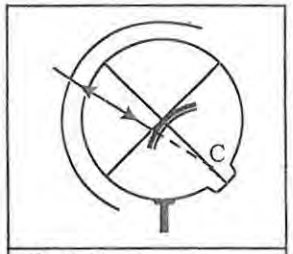


Fig. 1.11

Explicați de ce orice rază de lumină care trece prin centrul de curbură sau a cărei prelungire trece prin centrul de curbură se reflectă pe aceeași direcție.

Oglinda concavă transformă un fascicul paralel într-un *fascicul convergent* (fig. 1.12).

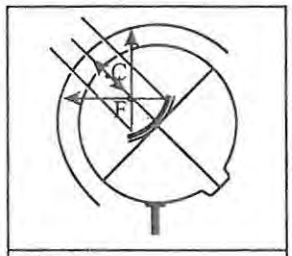


Fig. 1.12

Punctul de intersecție al razelor reflectate este *focarul* oglinzii. Focarul oglinzii concave este *real*.

Oglinda convexă transformă un fascicul paralel într-un *fascicul divergent* (fig. 1.13).

Punctul de intersecție al prelungirilor razelor reflectate este *focarul* oglinzii. Focarul oglinzii convexe este *virtual* (se află în spatele oglinzii).

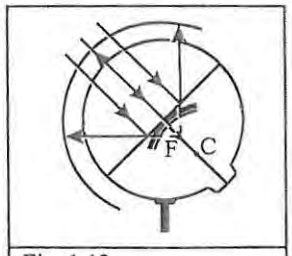


Fig. 1.13

Demonstrați că focarul principal al unei oglinzi sferice este situat la distanță egală de centrul de curbură și de vârful oglinzii (fig. 1.14 și fig. 1.15).

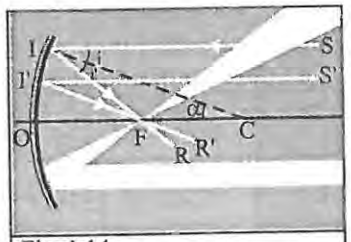


Fig. 1.14

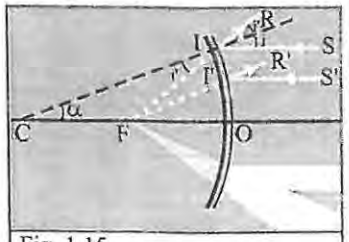


Fig. 1.15

Distanța de la vârful oglinzii la focarul oglinzii se numește *distanță focală* (f). Distanța focală este jumătate din raza de curbură.

$$f = \frac{R}{2} \qquad (1.2)$$

Imagini formate în oglinzi sferice

În funcție de poziția unui obiect luminos față de o oglindă imaginea formată de oglindă poate fi:

- *imagine reală*: dacă se formează la intersecția razelor reflectate și poate fi proiectată pe un ecran;
- *imagine virtuală*: dacă se formează la intersecția prelungirilor razelor reflectate și nu poate fi proiectată pe un ecran.

Deplasați un obiect luminos (o lumânare) de-a lungul axei optice principale a unei oglinzi concave (fig. 1.16). Descrieți imaginile obținute pentru diferite poziții ale obiectului. Reluați experimentul folosind o oglindă convexă (fig. 1.17).

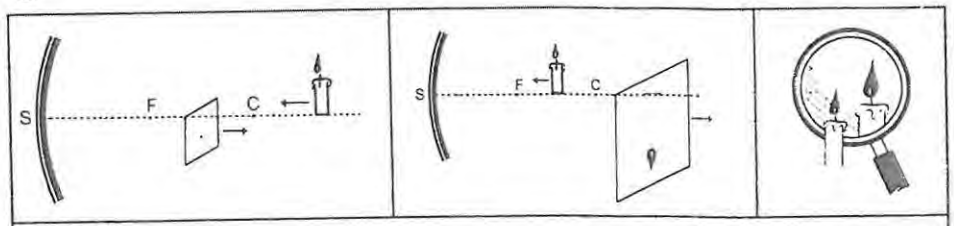


Fig. 1.16

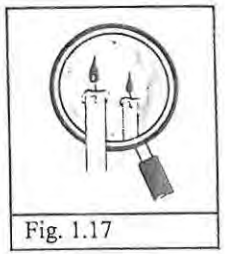


Fig. 1.17

Comparați caracteristicile imaginilor obținute cu cele descrise în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

Oglindă	Obiectul	Imaginea			
	Distanța obiect-oglindă($\lvert x_1 \rvert$)	Distanța oglindă-imagine($\lvert x_2 \rvert$)	Natura imaginii	Mărimea imag. în raport cu obiectul	Poziția imaginii
concavă	$\lvert x_1 \rvert > 2\lvert f \rvert$	$\lvert f \rvert > \lvert x_2 \rvert > 2\lvert f \rvert$	reală	micșorată	răsturnată
	$\lvert x_1 \rvert = 2\lvert f \rvert$	$\lvert x_2 \rvert = 2\lvert f \rvert$	reală	egale	răsturnată
	$2\lvert f \rvert > \lvert x_1 \rvert > \lvert f \rvert$	$\lvert x_2 \rvert > 2\lvert f \rvert$	reală	mărită	răsturnată
	$\lvert x_1 \rvert < \lvert f \rvert$	$\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$	virtuală	mărită	dreaptă
convexă	$\forall \lvert x_1 \rvert$	$\lvert x_2 \rvert < \lvert x_1 \rvert$	virtuală	micșorată	dreaptă

Construcții grafice de imagini în oglinzi sferice

Un punct luminos emite lumină în toate direcțiile.

Pentru a obține grafic imaginea punctului luminos A, este suficient să reprezentăm două din următoarele raze:

- o rază care trece prin centrul de curbură și se reflectă pe aceeași direcție;
- o rază paralelă cu axa optică principală care, după reflexie, trece prin focarul oglinzii (oglinda concavă) sau prelungirea razei reflectate trece prin focarul oglinzii (oglinda convexă);
- o rază care trece prin focarul oglinzii, după reflexie, devine paralelă cu axa optică principală.

La intersecția celor două raze reprezentate se obține grafic imaginea punctului luminos. Fiecărui punct obiect îi corespunde un singur punct imagine.

Observație:

➢ Un obiect are o infinitate de puncte. Imaginea obiectului este dată de mulțimea punctelor imagine obținute. Reprezentând obiectul printr-un segment AB perpendicular pe axa optică principală, cu punctul B situat pe axă, se construiește imaginea punctului A. Imaginea punctului B se obține ducând din A' perpendiculara pe axa optică principală, intersecția cu axa fiind imaginea B'.

În figurile 1.18 și 1.19 sunt reprezentate imaginile A'B' ale unui obiect luminos AB într-o oglindă concavă, respectiv o oglindă convexă.

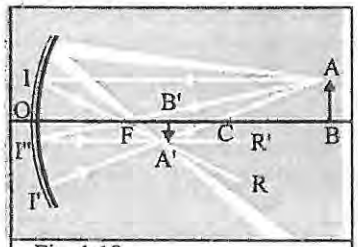


Fig. 1.18

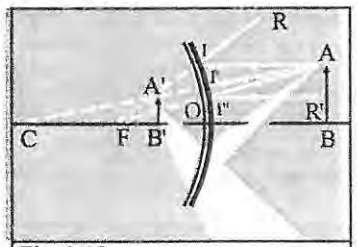


Fig. 1.19

Construiți imaginea unui obiect luminos într-o oglindă concavă pentru diferite poziții ale sale față de oglindă. Comparați caracteristicile imaginilor cu cele observate experimental.

Determinarea pe cale analitică a poziției imaginii unui obiect în oglinda sferică

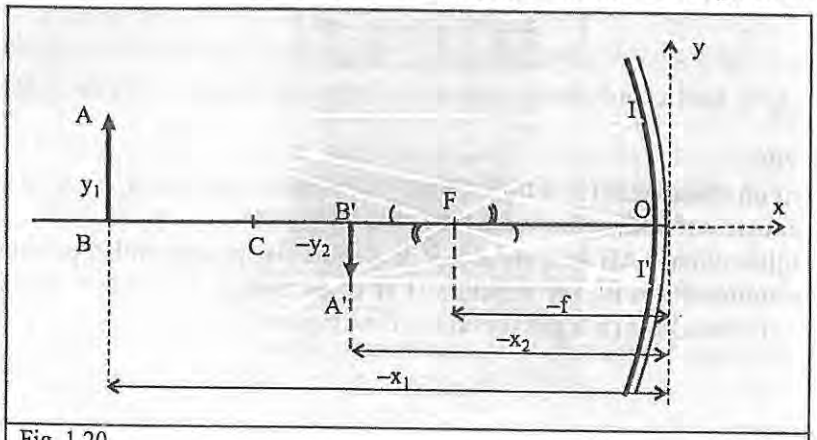


Fig. 1.20

Convenție de semne:

Se alege un sistem de două axe perpendiculare (xOy) cu originea în vârful oglinzii. Axa Ox coincide cu axa optică principală și are sensul în sensul propagării luminii incidente, iar axa Oy are sensul în sus. Poziția punctului pe axe se indică prin coordonata corespunzătoare.

Folosind convenția de semne, pentru situația din figura 1.20 coordonata x_1 este negativă, deci segmentul OB are lungimea "$-x_1$". Analog înălțimea imaginii A'B' este "$-y_2$". Din asemănarea triunghiurilor OIF și B'A'F obținem rapoartele de asemănare:

$$\frac{IO}{A'B'} = \frac{OF}{FB'} \quad \text{unde } IO \simeq AB = y_1 \text{ iar } FB' = -x_2 - (-f)$$

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{f}{x_2 - f}} \qquad (1.3)$$

Din asemănarea triunghiurilor I'OF și ABF obținem rapoartele de asemănare:

$$\frac{AB}{I'O} = \frac{BF}{FO} \quad \text{unde: } I'O \simeq A'B' = -y_2 \text{ iar } BF = -x_1 - (-f)$$

deci:

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{x_1 - f}{f}} \qquad (1.4)$$

Din relațiile (1.3) și (1.4) obținem: $\frac{f}{x_2 - f} = \frac{x_1 - f}{f}$ sau $x_1 x_2 - f x_1 - f x_2 = 0$

Împărțind ultima relație prin produsul $x_1 x_2 f$ obținem **formula oglinzilor sferice:**

$$\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}} \qquad (1.5)$$

unde x_1 și x_2 sunt coordonatele obiectului, respectiv imaginii față de oglindă.

Observație:

➢ Pentru un obiect real ($x_1 < 0$), dacă $x_2 < 0$ imaginea este reală, iar dacă $x_2 > 0$ imaginea este virtuală (se formează în spatele oglinzii).

În condițiile în care AB este un obiect perpendicular pe axa optică principală a cărui imagine este A'B', iar punctele B și B' se află pe axa optică principală, definim **mărirea liniară transversală** ca fiind raportul:

$$\boxed{\beta = \frac{y_2}{y_1}} \qquad (1.6)$$

unde: y_1 este ordonata punctului A;
y_2 este ordonata punctului A'.

Din asemănarea triunghiurilor AOB și A'OB' se obține mărirea liniară a unei oglinzi sferice:

$$\boxed{\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1}} \qquad (1.6')$$

Observație:

➢ Când $\beta < 0$, imaginea este reală și răsturnată.

➢ Când $\beta > 0$, imaginea este virtuală și dreaptă.

➢ Când $|\beta| > 1$, imaginea este mărită.

➢ Când $|\beta| < 1$, imaginea este micșorată.

Oglinzile sferice concave au aplicații în practică: la construcția telescoapelor, a proiectoarelor de toate tipurile etc. Oglinzile convexe sunt utilizate la construcția retrovizoarelor de automobil, la reglementarea circulației pe străzile orașelor etc.

1.1.2 LEGILE REFRACȚIEI

O rază incidentă SI întâlnește suprafața de separare dintre două medii transparente în punctul de incidență I (fig. 1.21).

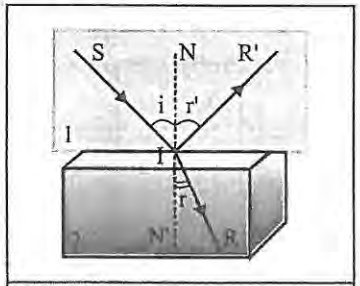


Fig. 1.21

Raza care trece în al doilea mediu, *raza refractată* IR, formează cu normala NN' în punctul de incidență I, unghiul r, numit *unghi de refracție*.

Experimental s-au stabilit **legile refracției:**

1) Raza incidentă, normala în punctul de incidență și raza refractată sunt în același plan.

2) Pentru două medii transparente și omogene raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție este constant (n_{21}).

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}} \qquad (1.7)$$

Valoarea raportului $\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}$ se numește *indice de refracție relativ* al mediului al 2-lea (în care se găsește raza refractată) în raport cu mediul 1 (în care se găsește raza incidentă).

Tabelul 1.2: *Indicii de refracție pentru lumina galbenă de sodiu*

Substanța	Indicele de refracție	Substanța	Indicele de refracție
Gheață	1,309	Alcool metilic (CH_3OH)	1,329
Fluorină (CaF_2)	1,434	Apă (H_2O)	1,333
Sare de bucătărie (NaCl)	1,544	Alcool etilic (C_2H_5OH)	1,3618
Cuarț (SiO_2)	1,544	Glicerină	1,473
Diamant	2,417	Aer	1,003

Indicele de refracție al unui mediu transparent în raport cu vidul se numește *indice de refracție absolut.*

Indicele de refracție absolut al unui mediu transparent (n) este egal cu raportul dintre viteza de propagare a luminii în vid (c) și viteza de propagare a luminii în mediul respectiv (v).

$$n = \frac{c}{v} \qquad (1.8)$$

Indicele de refracție relativ al mediului 2 în raport cu mediul 1 este:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \qquad (1.9)$$

unde: n_1 și n_2 sunt indicii de refracție absoluți ai celor două medii transparente, iar v_1 și v_2 vitezele corespunzătoare de propagare a luminii în cele două medii.

Calculați viteza de propagare a luminii prin diamant și prin sticlă de cuarț.

În funcție de indicii de refracție absoluți, *a doua lege a refracției* poate fi exprimată astfel:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \qquad (1.10)$$

Observații:

➢ Un mediu este mai refringent decât altul dacă indicele său de refracție este mai mare.

➢ Când lumina trece dintr-un mediu mai puțin refringent într-un mediu mai refringent unghiul de refracție este mai mic decât unghiul de incidență (fig. 1.22).

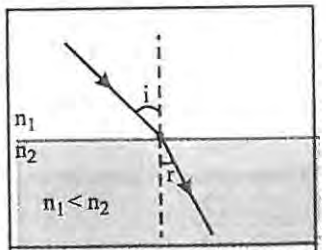


Fig. 1.22

Determinarea experimentală a indicelui de refracție al unui material transparent

Lucrați în grup.
Fixați pe un disc gradat (din trusa de fizică) un semicilindru din sticlă (plastic) astfel încât fața plană a semicilindrului să se afle pe diametrul discului și centrele lor să coincidă (fig.1.23).
Trimiteți un fascicul subțire de lumină (de exemplu de la un laser) spre centrul feței plane a semicilindrului.
Măsurați unghiurile de refracție pentru diferite unghiuri de incidență și determinați indicele de refracție al materialului din care este confecționat semicilindrul considerând indicele de refracție al aerului $n_{aer} = 1$.
Precizați sursele de erori.

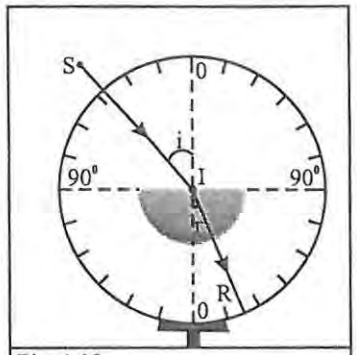


Fig. 1.23

Ce valoare are unghiul de refracție la ieșirea din semicilindru în aer? Justificați răspunsul.

1.1.3 REFLEXIA TOTALĂ (extindere)

În cazul în care lumina trece dintr-un mediu mai refringent într-un mediu mai puțin refringent (de exemplu: din apă în aer, din sticlă în aer, din sticlă în apă etc.) unghiul de refracție este totdeauna mai mare decât unghiul de incidență. Pentru un anumit unghi de incidență, unghiul de refracție poate avea 90°.

Unghiul de incidență pentru care unghiul de refracție este 90° se numește **unghi limită** (ℓ).

Valoarea unghiului limită se determină aplicând legea a doua a refracției:

$$\sin \ell = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1.11)$$

Pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită lumina nu mai trece în mediul al doilea, ci se reflectă în punctul de incidență I, întorcându-se în primul mediu (conform legilor reflexiei), suprafața de separare comportându-se deci ca o oglindă.

Absența completă a luminii în mediul al doilea pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită și întoarcerea ei integrală în primul mediu a făcut ca acest fenomen să fie numit ***reflexie totală*** (fig.1.24).

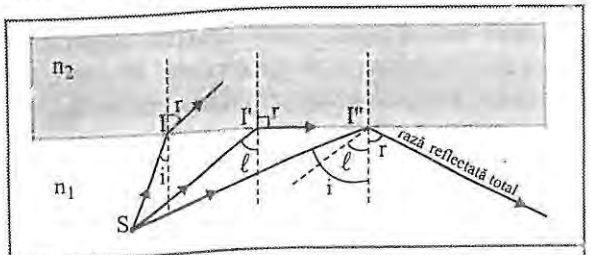


Fig. 1.24

Fenomenul de reflexie totală a luminii explică unele fenomene din atmosferă. De exemplu, într-o zi toridă poți avea impresia că vezi apă în depărtare. Apa care se vede este în realitate imaginea cerului (obținută când lumina este reflectată total de către un strat de aer din apropierea solului, deoarece densitatea aerului variază cu temperatura și deci straturile de aer au indici de refracție diferiți).

| Explicați apariția mirajului optic în deșert.

O succesiune de reflexii totale este folosită pentru a direcționa raza de lumină prin tuburi subțiri din sticlă, numite **fibre optice** (fig. 1.25) sau prin jetul de apă.

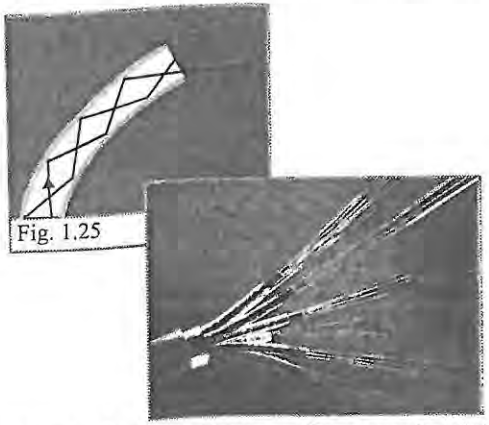


Fig. 1.25

Fibrele optice sunt folosite în domenii cum ar fi: *comunicații* (pentru a transporta informația), *medicină* (pentru vizualizarea zonelor care ar fi accesibile doar prin intervenții chirurgicale) etc.

1.1.4 PRISMA OPTICĂ (extindere)

Prisma optică este un mediu transparent și omogen limitat de două suprafețe plane neparalele.

Elementele unei prisme (fig. 1.26) sunt:

- *muchia prismei* (1), dreapta după care se intersectează cele două suprafețe plane;
- *unghiul prismei* (2), unghiul diedru format de cele două suprafețe;
- *baza prismei* (3), fața opusă muchiei prismei.

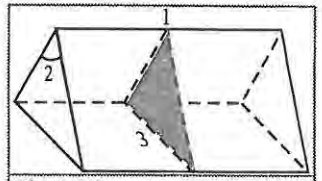


Fig. 1.26

O secțiune a prismei într-un plan perpendicular pe muchie se numește *secțiune principală*.

O rază de lumină monocromatică SI care intră din aer (n_1) în prismă (n_2) se refractă în punctul de incidență I și apoi la ieșirea din prismă în aer se refractă în punctul de emergență I'.

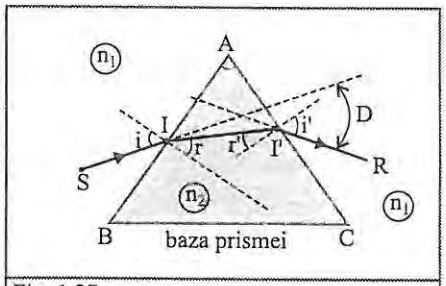


Fig. 1.27

Unghiul dintre raza emergentă I'R și raza incidentă SI se numește *unghi de deviație* (D).

Geometric se poate demonstra că unghiul de deviație este: $D = (i - r) + (i' - r')$.

Deoarece: $r + r' = A$

$$\boxed{D = i + i' - A} \qquad (1.12)$$

Deviația minimă

Relația (1.12) arată că unghiul de deviație variază cu unghiul de incidență.

Experimental se constată că, dând diverse valori unghiului de incidență, unghiul de deviație este totdeauna mai mare decât o anumită valoare minimă. Această valoare minimă se obține când unghiul de emergență (i') are aceeași măsură cu unghiul de incidență (i), raza refractată fiind paralelă cu baza prismei (când secțiunea principală a prismei este triunghi isoscel).

Problemă rezolvată

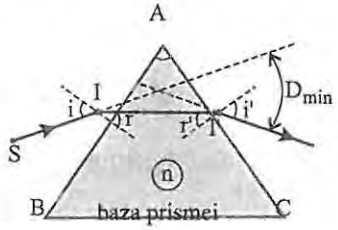
Pe o față a unei prisme, al cărei unghi este A = 60°, cade un fascicul îngust de lumină, paralel cu baza BC. Unghiul de deviație minim are valoarea 60°. Să se calculeze indicele de refracție al prismei.

Rezolvare:

$A = 60°$

$D_{min} = 60°$

$n = ?$



Unghiul de deviație este minim când $i = i'$, deci: $\boxed{D_{min} = 2i - A}$ (1.13)

rezultă: $$i = \frac{D_{min} + A}{2}$$

Aplicăm legea a doua a refracției: $\sin i = n \sin r$ și $n \sin r' = \sin i'$

Unghiurile r și r' sunt egale $r = r'$ dar, $r + r' = A$, deci:

$$r = \frac{A}{2}$$

Înlocuind în legea a doua a refracției valorile unghiurilor de incidență și de refracție, rezultă:

$$\sin\frac{D_{min} + A}{2} = n \sin\frac{A}{2}$$

Indicele de refracție al prismei este: $$\boxed{n = \frac{\sin\frac{D_{min} + A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}} \quad (1.14)$$

numeric: $n = \frac{\sin 60^0}{\sin 30^0} = \sqrt{3}$

Condiția de emergență

Atunci când indicele de refracție al materialului prismei este mai mare decât indicele de refracție al mediului exterior există posibilitatea apariției fenomenului de reflexie totală în punctul I' și raza de lumină să nu mai poată ieși din prismă. Pentru ca o rază de lumină care pătrunde în prismă prin fața AB să poată ieși prin fața AC (fig. 1.27) trebuie ca $r' \leqslant \ell$. Observăm că în punctul I unghiul de refracție r variază între 0 și ℓ când unghiul i variază între 0 și $\pi/2$.

Deci, după prima refracție a razei SI, unghiul r este totdeauna mai mic decât ℓ: $r \leqslant \ell$.

Adunând cele două inegalități obținem: $r + r' \leqslant 2\ell$

Dar, $A = r + r'$ și rezultă:

$$\boxed{A \leqslant 2\ell} \quad (1.15)$$

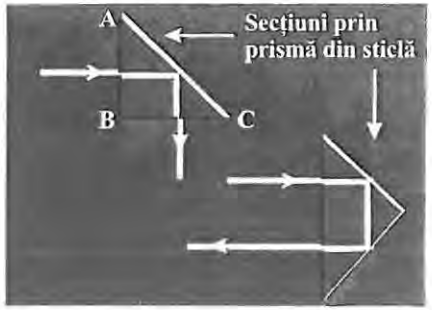
Inegalitatea (1.15) este condiția ca orice rază, odată intrată în prismă, să poată ieși din ea (*condiția de emergență*).

Prisma cu reflexie totală

Dintre numeroasele tipuri de prisme utilizate în practică menționăm prisma a cărei secțiune principală este un triunghi dreptunghic isoscel.

Dacă lumina cade perpendicular pe una din fețele-catetă, deci sub unghiul de incidență $i = 0$, atunci $r' = 45°$.

Dacă prisma este din sticlă ($n = 1,5$) unghiul limită al sticlei este $\ell = 42°$.



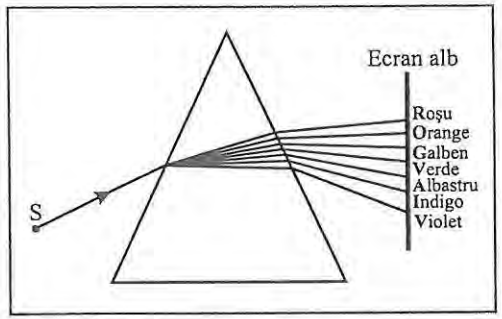
Rezultă că pe fața-ipotenuză a prismei lumina cade sub un unghi $r' > \ell$ și se va reflecta total sub un unghi de reflexie de 45°. Raza va cădea perpendicular pe cealălaltă față-catetă BC și va trece în aer nedeviată.

Prisma utilizată în aceste condiții deviază o rază din drumul ei cu un unghi de 90°.

Reflexia totală în prisme din sticlă este utilizată pentru a devia sau a întoarce un fascicul de lumină. Pe acest principiu funcționează catadioptrii roșii (ochi de pisică). Ei, fiind plasați în spatele vehiculelor sau pe diferite panouri de semnalizare rutieră, retrimit lumina pe direcția pe care a venit.

Dispersia luminii prin prismă

Un fascicul îngust de lumină albă la trecerea prin prisma optică se descompune în punctul de incidență, după intrarea în prismă, într-un fascicul mai larg și colorat. După ieșirea din prismă, acesta va apărea ca o bandă viu colorată (formată din fascicule de lumină monocromatică).
Fenomenul se numește *dispersia* (descompunerea) luminii. Dispersia luminii se datorează faptului că mediul transparent al prismei are indici de refracție diferiți pentru culori diferite (de exemplu pentru sticla obișnuită $n_{violet} > n_{roșu}$).



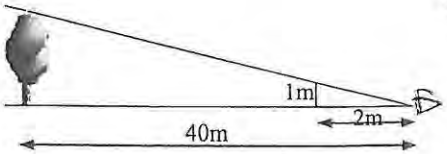
Fenomenul de dispersie a luminii albe (de la Soare) prin prismă a fost obținut și cercetat pentru prima dată de Newton.

Explicați formarea curcubeului.

PROBLEME

1

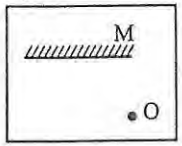
Un observator culcat pe sol vizează vârful unui băț și vârful coroanei unui arbore.



a) Ce înălțime are arborele dacă bățul cu înălțimea de 1 m se află la 2 m de observator, iar arborele se află la 40 m?
b) La ce distanță de arbore trebuie să se plaseze observatorul pentru a estima înălțimea arborelui dacă folosește o riglă de 20 cm pe care o plasează la 60 cm de ochi?

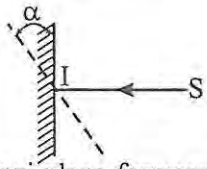
2

Reprezentați pe o schemă, ca aceea din figură, regiunea din spațiu văzută în oglinda plană (M) de un observator aflat în punctul O.



3

O rază de lumină cade perpendicular pe suprafața unei oglinzi plane. Oglinda se rotește cu unghiul α, ca în figură. Cu ce unghi se va roti raza reflectată?



4

Două oglinzi plane formează între ele un unghi $\alpha = 120°$.

La distanța d = 8 cm de dreapta după care se intersectează și la distanțe egale față de planele oglinzilor se află o sursă S. Să se determine distanța dintre imaginile sursei în cele două oglinzi.

5

Un obiect se află la 16 cm față de centrul unui glob sferic argintat, pentru pomul de iarnă, cu diametrul de 8 cm.
Care este poziția imaginii și ce mărire realizează oglinda?

6

Diametrul Lunii este de 3 480 km, iar distanța acesteia față de Pământ este de 386 000 km.
Să se afle diametrul imaginii Lunii formate de oglinda sferică concavă a unui telescop cu distanța focală de 4 m.

7

O oglindă concavă formează imaginea filamentului unei lămpi pe un ecran aflat la 4 m de oglindă.
Filamentul are înălțimea de 5 mm, iar imaginea are înălțimea de 40 cm.
a) Care este raza de curbură a oglinzii ?
b) La ce distanță de vârful oglinzii este așezat filamentul ?

8

Ce tip de oglindă este necesar pentru a forma, pe un perete așezat la 3 m față de oglindă, imaginea filamentului unui felinar aflat la 10 cm în fața oglinzii?
Care este înălțimea imaginii dacă înălțimea obiectului este de 5 mm?
Reprezentați mersul razelor de lumină.

9

O oglindă concavă cu distanța focală de 2 cm formează o imagine dreaptă de trei ori mai mare a unui obiect real, de înălțime 2 cm. Să se afle înălțimea imaginii și pozițiile obiectului și imaginii.

10

O oglindă sferică concavă utilizată pentru ras are raza de curbură de 30 cm.
a) Care este mărirea transversală când fața este la 10 cm de vârful oglinzii ?
b) Unde se formează imaginea și care sunt caracteristicile ei ?

11

Cum vede un scafandru o pasăre care zboară deasupra apei: mai sus sau mai jos decât este ea în realitate? Justificați răspunsul.

12

Un bazin de înot cu adâncimea H are apă până la jumătate. Razele solare cad sub un unghi de incidență i. Umbra marginii bazinului este așternută pe fundul bazinului.
a) Determinați lungimea umbrei.
b) Până la ce nivel ar trebui să fie apa în bazin pentru ca lungimea umbrei să se reducă la jumătate?
Se cunoaște indicele de refracție relativ al apei în raport cu aerul, n.

13

O rază de lumină cade sub un unghi de incidență de 30° pe o suprafață plană ce separă două materiale transparente cu indicii de refracție 1,60 și 1,40.
Calculați unghiul de refracție (din mediul cu indicele de refracție mai mic).

14

Un fascicul paralel de lumină formează un unghi de 30° cu suprafața unei lame de sticlă având indicele de refracție de 1,50.
a) Ce valoare are unghiul dintre fasciculul reflectat și suprafața sticlei?
b) Ce valoare trebuie să aibă unghiul de incidență θ pe această lamă, pentru ca unghiul de refracție să fie θ/2?

15

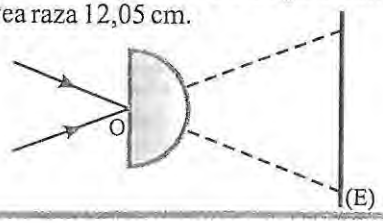
Un fascicul de lumină cade pe o lamă din sticlă sub un unghi de incidență de 60°, o parte a fasciculului fiind reflectată și o parte refractată. Se observă că razele reflectată și refractată formează un unghi de 90°. Calculați indicele de refracție al sticlei.

16

Ce adâncime reală are apa dintr-un bazin, dacă privind perpendicular pe suprafața apei ni se pare că are o adâncime de 2 m?

17

Un fascicul luminos, monocromatic, converge în punctul O. El formează pe un ecran (E), aflat la 0,5 m de O, o pată luminoasă cu rază 18,2 cm. Se așază în calea fasciculului un semicilindru din sticlă ca în figură, punctul O fiind în centrul feței plane. Pata de pe ecran va avea raza 12,05 cm.



a) Calculați indicele de refracție al sticlei, n.
b) Ce rază va avea pata de pe ecran dacă tot sistemul se scufundă în apă cu indicele de refracție $n_a = 1,33$?

18

Care este valoarea cea mai mare a unghiului de deviație a razei de lumină ca urmare a refracției pe suprafața de separare a două medii transparente și omogene? Se cunoaște valoarea unghiului limită ℓ.

19

O lamă din sticlă cu fețele plan paralele având indicele de refracție 1,6 este menținută pe suprafața apei dintr-o cuvă. O rază de lumină care vine din aer formează un unghi de incidență de 45° cu suprafața superioară a sticlei.
Ce unghi formează raza cu normala în apă ($n_{apă}$ = 1,33)? Cum variază acest unghi cu indicele de refracție al sticlei?

20 E

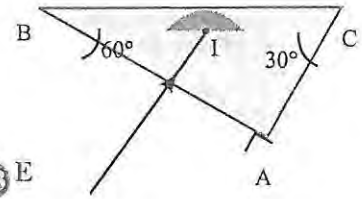
O sursă punctiformă de lumină se află pe fundul unui bazin plin cu apă (n = 4/3) cu adâncimea de 1 m. Să se calculeze raza cercului luminos de pe suprafața apei.

21 E

Un fascicul îngust de lumină cade normal pe una din fețele-catetă ale unei prisme din sticlă cu secțiunea un triunghi dreptunghic isoscel și se reflectă total în interiorul prismei, pe fața ipotenuzei. Ce se poate spune despre indicele de refracție al sticlei? Ce se întâmplă dacă prisma este introdusă într-o cuvă cu apă (n_a = 4/3)? Reprezentați mersul unei raze de lumină.

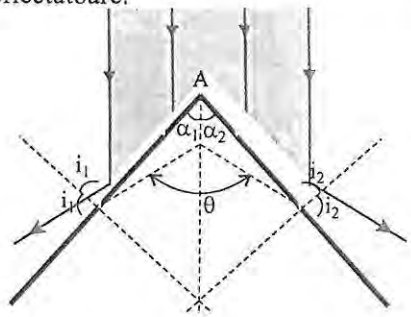
22 E

O rază de lumină intră normal pe fața AB a prismei, reprezentată în figură, cu secțiunea triunghi dreptunghic și cu indicele de refracție n = 1,5. În punctul de incidență I pe fața exterioară a prismei se află o picătură de lichid cu indicele de refracție n'. Care este valoarea maximă pe care o poate avea n' pentru ca raza de lumină să se reflecte total în I?



23 E

Un fascicul paralel de lumină este incident pe o prismă ca în figură, o parte fiind reflectată pe o față și o parte pe cealaltă. Arătați că unghiul θ dintre cele două fascicule reflectate este dublul unghiului A dintre cele două suprafețe reflectătoare.



1.2 LENTILE SUBȚIRI

Legile reflexiei şi refracției au stat la baza construirii numeroaselor instrumente optice (lupa, ochelarii, microscopul etc.) folosite pentru a mări capacitatea de vedere a ochiului liber, cu alte cuvinte pentru a-l ajuta să vadă ceea ce este prea departe sau prea mic.

Lentila este elementul de bază al tuturor acestor instrumente optice.

Fig. 1.28

Lentila este un mediu transparent şi omogen mărginit de două suprafețe din care cel puțin una nu este plană.

Lentilele sunt confecționate din sticlă, material plastic etc., grosimea lor la mijloc fiind diferită de cea de la extremități.

Lentilele mai groase la mijloc şi mai subțiri la extremități se numesc **lentile convergente**.

După forma suprafețelor care le mărginesc lentilele convergente pot fi:

- lentile biconvexe (fig.1.29 a),
- lentile plan-convexe (fig. 1.29 c) şi
- meniscuri convergente (fig. 1.29 b).

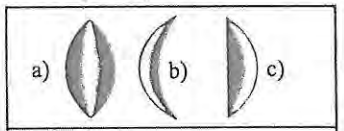


Fig. 1.29

Lentilele convergente transformă un fascicul paralel într-un *fascicul convergent* (fig. 1.30). Punctul de convergență este *focarul* imagine al lentilei. Focarele lentilei convergente sunt *reale*.

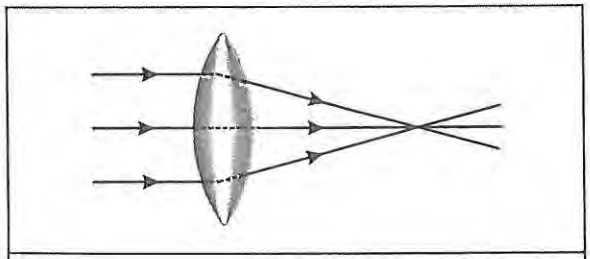


Fig. 1.30

Lentilele mai subțiri la mijloc decât la extremități se numesc **lentile divergente**.

Lentilele divergente pot fi:

- biconcave (fig. 1.31 a),
- plan-concave (fig. 1.31 c) şi
- meniscuri divergente (fig. 1.31 b).

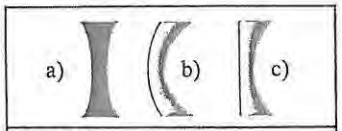


Fig. 1.31

Lentilele divergente transformă un fascicul paralel într-un *fascicul divergent* (fig. 1.32). Punctul de intersecție al prelungirilor razelor refractate este *focarul* imagine al lentilei. Focarele lentilei divergente sunt *virtuale*.

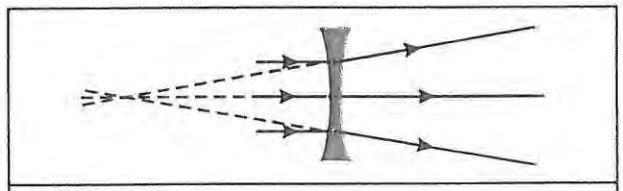


Fig. 1.32

Elementele unei lentile

Principalele elemente ale unei lentile mărginită de două suprafețe sferice (fig. 1.33) sunt:

- *centrele de curbură* ale suprafețelor sferice: C_1 şi C_2
- *razele de curbură* ale fețelor: R_1 şi R_2
- *axa optică principală*: dreapta C_1C_2
- *centrul optic al lentilei*: O
- *focarele* principale ale lentilei, situate pe axa optică principală simetric față de centrul optic al lentilei.

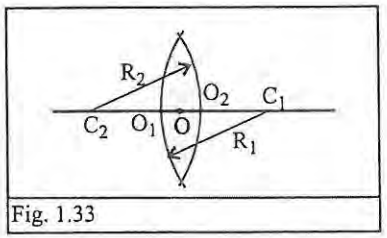
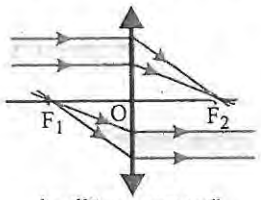


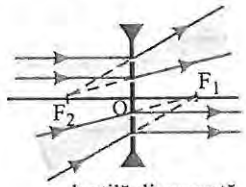
Fig. 1.33

O lentilă este considerată subțire dacă grosimea ei măsurată pe axa optică principală (O_1O_2) este mult mai mică decât razele de curbură ale fețelor sale.

Reprezentarea schematică a lentilelor subțiri



lentilă convergentă



lentilă divergentă

Distanța de la centrul optic al lentilei la focar se numește *distanța focală* (f).
Unitatea de măsură a distanței focale în S.I.: $[f]_{S.I.} = m$.
Inversul distanței focale a unei lentile se numește convergență (C).

$$C = \frac{1}{f} \qquad (1.16)$$

Unitatea de măsură a convergenței în S.I. $[C]_{S.I.} = \frac{1}{m} = \delta$ (dioptria)

O dioptrie este convergența unei lentile cu distanța focală de un metru.
Prin convenție, distanța focală și convergența unei lentile convergente sunt *pozitive*, iar ale unei lentile divergente sunt *negative*.

1.2.1 IMAGINI FORMATE PRIN LENTILE SUBȚIRI

În funcție de poziția unui obiect luminos față de o lentilă, imaginea formată de lentilă poate fi:
- *imagine reală*: dacă se formează la intersecția razelor refractate și poate fi proiectată pe ecran;
- *imagine virtuală*: dacă se formează la intersecția prelungirilor razelor refractate și nu poate fi proiectată pe un ecran.

Folosind un montaj format dintr-un obiect luminos (flacăra unei lumânări, filamentul unui bec, o fantă de forma literei F așezată în fața unei surse de lumină etc.), o lentilă cu distanța focală cunoscută și un ecran, determinați experimental caracteristicile imaginii dată de lentilă pentru diferite poziții ale obiectului (fig. 1.34).

Fig. 1.34

Comparați caracteristicile imaginilor obținute cu cele din tabelul 1.3:

Tabelul 1.3

Lentila	Obiectul	Imaginea			
convergentă	Distanța obiect-lentilă($\lvert x_1 \rvert$)	Distanța lentilă-imagine($\lvert x_2 \rvert$)	Natura imaginii	Mărimea imag. în raport cu obiectul	Poziția imaginii
	$\lvert x_1 \rvert > 2f$	$f > \lvert x_2 \rvert > 2f$	reală	micșorată	răsturnată
	$\lvert x_1 \rvert = 2f$	$\lvert x_2 \rvert = 2f$	reală	egale	răsturnată
	$2f > \lvert x_1 \rvert > f$	$\lvert x_2 \rvert > 2f$	reală	mărită	răsturnată
	$\lvert x_1 \rvert < f$	$\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$	virtuală	mărită	dreaptă
divergentă	$\forall x_1$	$\lvert x_2 \rvert < \lvert x_1 \rvert$	virtuală	micșorată	dreaptă

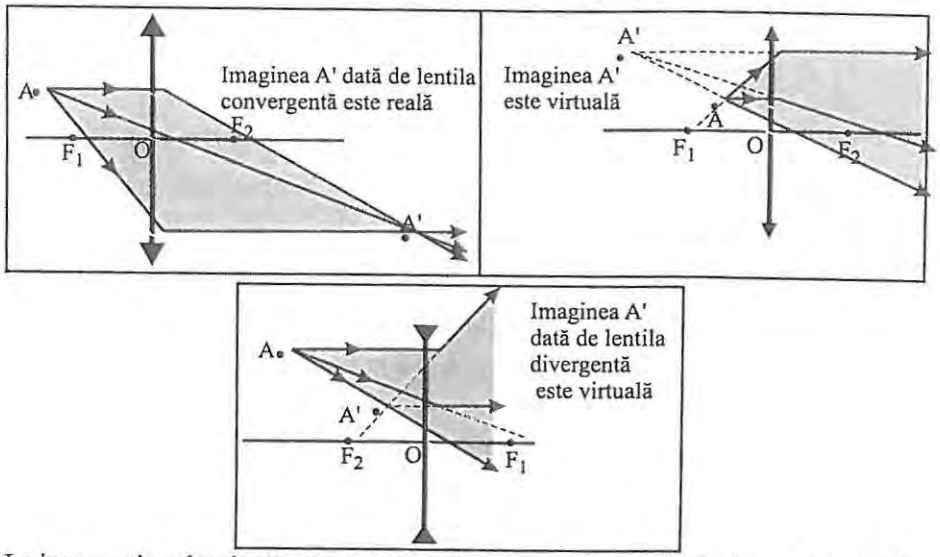
1.2.2 CONSTRUCȚII GRAFICE DE IMAGINI PRIN LENTILE

Construcția imaginii unui punct luminos prin lentilă

Un punct luminos emite lumină în toate direcțiile.

Pentru a obține grafic imaginea punctului luminos A, este suficient să reprezentăm două din următoarele raze:

- o rază care trece prin centrul optic și traversează lentila fără să fie deviată;
- o rază paralelă cu axa optică principală care, după refracție, trece prin focarul imagine (lentilă convergentă) sau prelungirea ei trece prin focarul imagine (lentilă divergentă);
- o rază care trece prin focarul obiect (sau a cărei prelungire trece prin focarul obiect), după refracție, devine paralelă cu axa optică principală.



La intersecția celor două raze reprezentate (sau a prelungirilor lor) se obține grafic imaginea punctului luminos.
Fiecărui punct obiect îi corespunde un singur punct imagine.

Construcția imaginii unui obiect prin lentilă

Un obiect are o infinitate de puncte. Imaginea obiectului este dată de mulțimea punctelor imagine obținute.
Se reprezintă obiectul printr-un segment AB perpendicular pe axa optică principală, cu unul din capete situat pe axă.
Se construiește imaginea (A') a punctului luminos A. Imaginea punctului B se obține ducând din A' o perpendiculară pe axa optică principală. Punctul de intersecție cu axa, B' este imaginea punctului B.

În figurile 1.35 şi 1.36 sunt reprezentate imaginile obiectului luminos AB pentru diferite poziţii faţă de o lentilă convergentă, respectiv divergentă.
Pentru fiecare situaţie reprezentată comparaţi caracteristicile imaginii cu cele obţinute experimental.

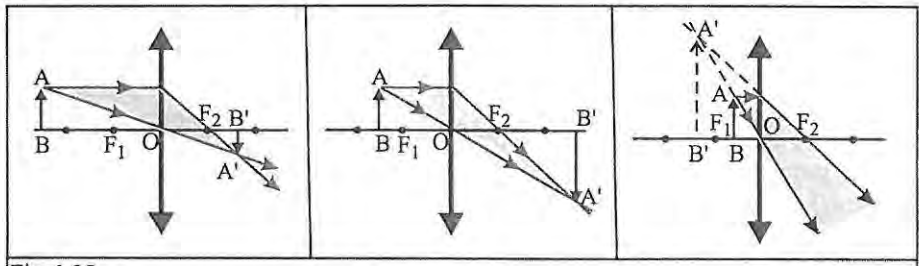


Fig. 1.35

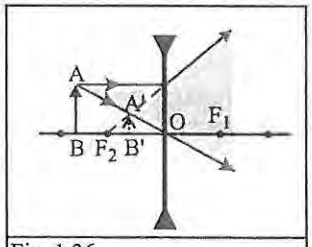


Fig. 1.36

1.2.3 DETERMINAREA PE CALE ANALITICĂ A POZIŢIEI IMAGINII UNUI OBIECT PRIN LENTILE

Poziţia imaginii unui obiect formată de o lentilă depinde atât de distanţa dintre obiect şi lentilă ($-x_1$) cât şi de distanţa focală (f) a lentilei.

În figura 1.37, A'B' este imaginea obiectului luminos AB dată de lentila convergentă.

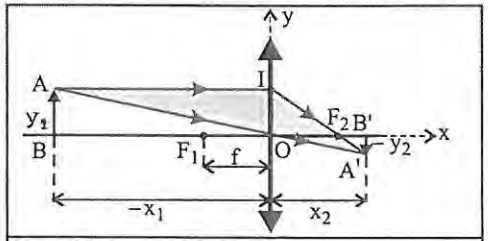


Fig. 1.37

Convenţie de semne:

Se alege un sistem de două axe perpendiculare xOy cu originea în centrul optic al lentilei. Axa Ox coincide cu axa optică principală şi are sensul în sensul propagării luminii, iar axa Oy are sensul în sus.

Poziţia punctelor pe axe este indicată de coordonatele corespunzătoare.
Folosind convenţia de semne, pentru situaţia din figura 1.37, x_1 este negativ, deci segmentul OB are lungimea "$-x_1$". Analog înălţimea imaginii A'B' este "$-y_2$".

Triunghiurile OAB şi OA'B' sunt triunghiuri asemenea deoarece:

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$ (opuse la vârf)

$\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle A'B'O$ (90°)

Rapoartele de proporţionalitate ale laturilor sunt: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$ (1.17)

Din asemănarea triunghiurilor OIF_2 şi $B'A'F_2$ obţinem: $\frac{OI}{A'B'} = \frac{F_2O}{F_2B'}$ (1.18)

Dar IO = AB şi din relaţiile (1.17) şi (1.18) rezultă: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{F_2O}{F_2B'}$

Folosind notaţiile din figura 1.37 şi convenţia de semne obţinem:

$$\frac{-x_1}{x_2} = \frac{f}{x_2 - f} \quad \text{sau} \quad x_2 f = -x_1 x_2 + x_1 f \;\Big|\; : x_1 x_2 f$$

Formula lentilelor subţiri: $\boxed{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}}$ (1.19)

Observaţie:

➢ Pentru un obiect real ($x_1 < 0$), dacă $x_2 > 0$ imaginea este reală, iar dacă $x_2 < 0$ imaginea este virtuală.

Dacă un obiect AB este perpendicular pe axa optică principală, iar A'B' este imaginea sa, punctele B şi B' fiind situate pe axa optică principală, iar y_1 şi y_2 sunt ordonatele punctelor A şi A', *mărirea liniară transversală* este:

$$\boxed{\beta = \frac{y_2}{y_1}} \quad (1.20)$$

Folosind relaţia (1.17) mărirea liniară a lentilei este:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \quad (1.21)$$

Observaţii:

➢ Când $\beta < 0$, imaginea este reală şi răsturnată.

➢ Când $\beta > 0$, imaginea este virtuală şi dreaptă.

➢ Când $|\beta| > 1$, imaginea este mărită.

➢ Când $|\beta| < 1$, imaginea este micşorată.

1.2.4 ASOCIAȚII DE LENTILE

Sistemele (asociațiile) de lentile subțiri sunt formate din două sau mai multe lentile care au axul optic comun, adică sunt *centrate*. Ele sunt situate la o anumită distanță una față de alta, iar imaginea obiectului prin prima lentilă devine obiect pentru cea de-a doua.

În figura 1.38 este construită imaginea unui obiect luminos AB dată de un sistem format din două lentile convergente aflate la distanța „a" una de cealaltă.

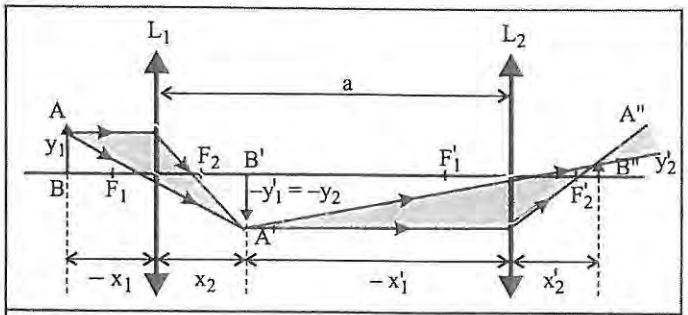


Fig. 1.38

Imaginea A'B' formată de lentila L_1 devine obiect pentru lentila L_2. Aplicăm formula lentilelor (1.19) pentru fiecare lentilă:

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1} \qquad (1.22)$$

$$\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f_2} \qquad (1.23)$$

Dar: $-x_1'+x_2=a \Rightarrow -x_1'=a-x_2$

Dacă se lipesc cele două lentile: $a=0$ și $x_1'=x_2$

Adunând relațiile (1.22) și (1.23) obținem:

$$\boxed{\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}} \qquad (1.24)$$

Convergența sistemului de lentile lipite este: $C=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=C_1+C_2$

Convergența sistemului de lentile subțiri lipite este egală cu suma convergențelor lentilelor componente.

$$\boxed{C=C_1+C_2+.....+C_n} \quad \text{sau} \quad \boxed{\frac{1}{F}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_k}} \qquad (1.25)$$

Observație:

➢ Un sistem se numește *sistem afocal* (telescopic) dacă focarul imagine al primei lentile coincide cu focarul obiect al celei de-a doua lentile ($a=f_1+f_2$).

Un fascicul incident paralel cu axa optică principală va fi tot paralel cu axa optică principală când iese dintr-un sistem afocal (fig.1.39).

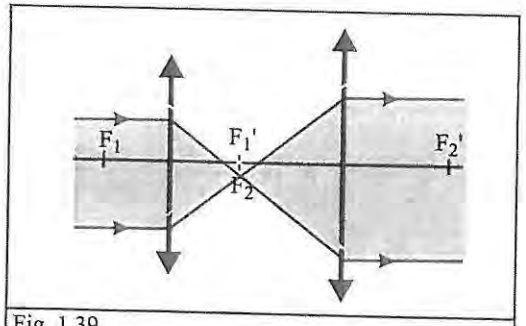


Fig. 1.39

Demonstrați că mărirea liniară transversală a unui sistem format din două lentile centrate subțiri este:

$$\beta=\beta_1\cdot\beta_2$$

unde β_1 și β_2 sunt măririle liniare transversale ale lentilelor.

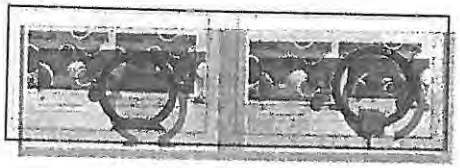
Mărirea liniară transversală β a unui sistem format din n lentile subțiri ale căror măriri liniare sunt $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ este:

$$\boxed{\beta=\beta_1\cdot\beta_2\cdot...\cdot\beta_n} \qquad (1.26)$$

PROBLEME

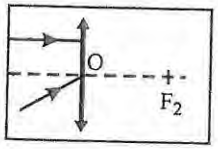
1

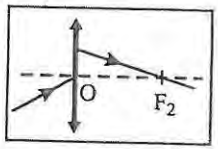
Analizați imaginile din figurile de mai jos. Care dintre cele două lentile este convergentă?
Justificați răspunsul.



2

Completați pe scheme asemănătoare cu cele din figurile următoare mersul razelor de lumină și focarul obiect al fiecărei lentile convergente.



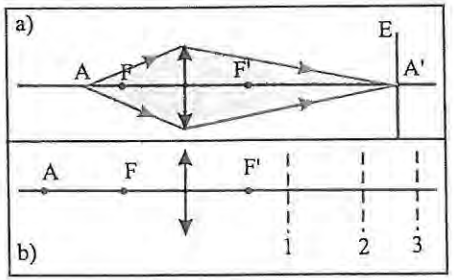


3

Andrei vrea să obțină pe un ecran imaginea flăcării unei lumânări aflate la 7 cm de o lentilă convergentă. Cum explicați faptul că oriunde ar așeza ecranul nu poate obține imaginea pe ecran?

4

Imaginea unui obiect luminos A se formează în A' (fig. a). Se depărtează obiectul A de lentilă. În figura b) lipsește ecranul. În care din cele trei poziții (1, 2 sau 3 – figura b) trebuie așezat ecranul? Justificați răspunsul. Reprezentați pe o schemă fasciculul de lumină (provenit de la punctul A) ce trece prin lentilă.

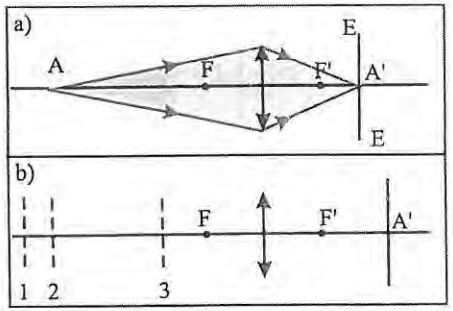


5

Distanța focală a unei lentile convergente este 0,04 m. Un obiect luminos cu înălțimea de 1 cm este așezat perpendicular pe axa optică principală la 3 cm de lentilă.
a) Ce convergență are lentila?
b) Putem obține imaginea pe un ecran? Care sunt caracteristicile imaginii? Reprezentați mersul razelor de lumină.

6

Imaginea unui obiect luminos A se formează în A' (fig. a). Se depărtează ecranul de lentilă (fig. b).
a) Pentru a avea pe ecran o imagine clară în ce poziție (1, 2 sau 3 – fig. b) trebuie plasat obiectul A? Justificați răspunsul.
b) Reprezentați grafic mai multe raze de lumină care pleacă din punctul A și trec prin lentilă.



7

Distanța focală a unei lentile convergente este 0,04 m.
a) Reprezentați schematic lentila.
b) Ce convergență are lentila?
c) Un punct luminos A se află la 1 cm deasupra axei optice principale a lentilei și la 12 cm de centrul optic. Unde se formează imaginea A' a punctului A?

8

Distanța focală a unei lentile convergente este 0,07 m. Un obiect mic luminos AB cu înălțimea de 1 cm este așezat perpendicular pe axa optică principală a lentilei, la 10 cm de lentilă.
a) Reprezentați schematic lentila.
b) Ce convergență are lentila?
c) Unde trebuie plasat un ecran pentru a observa imaginea clară A'B' a obiectului luminos? Care sunt caracteristicile imaginii?

9

O lentilă formează imaginea unui obiect luminos pe un ecran situat la 12 cm de lentilă. Când lentila se depărtează cu 2 cm de obiect, ecranul trebuie deplasat mai aproape de obiect cu 2 cm, pentru a obține din nou imaginea.
Calculați distanța focală a lentilei.

10

Un obiect se află la 100 cm față de o lentilă cu convergența C = 2 dioptrii. La ce distanță de lentilă se formează imaginea și ce caracteristici are ea? Dar dacă obiectul se află la 50 cm față de lentilă?

11

O lentilă convergentă formează o imagine reală, de patru ori mai mare decât obiectul. Știind că distanța dintre obiect și imagine este de 60 cm, să se afle:
a) poziția obiectului și a imaginii;
b) distanța focală a lentilei.
Reprezentați mersul razelor de lumină.

12

La ce distanță de o lentilă convergentă cu distanța focală de 16 cm trebuie plasat un obiect luminos pentru a obține o imagine de 4 ori mai mare decât obiectul? Care este distanța, față de lentilă, la care se formează imaginea?
Trasați mersul razelor de lumină.

13

Un obiect luminos se află la 18 cm de un ecran.
a) În ce puncte, între obiect și ecran, poate fi așezată o lentilă cu distanța focală 4 cm pentru a se obține imagine pe ecran?
b) Care este mărirea obținută pentru fiecare din aceste poziții ale lentilei?

14

O lentilă subțire biconvexă este folosită pentru a proiecta pe un ecran imaginea unui obiect, cu înălțimea 5 cm, așezat perpendicular pe axa lentilei, la 30 cm de ea. Știind că imaginea este de două ori mai mare decât obiectul, calculați:
a) distanța focală a lentilei;
b) convergența unei lentile subțiri care prin alipire să formeze cu lentila dată un sistem cu distanța focală de 80 cm.
Ce fel de lentilă este?
c) mărirea liniară dacă obiectul este așezat în fața sistemului de lentile de la punctul b).
Trasați mersul razelor de lumină.

15

Două lentile, una convergentă cu distanța $f_1 = 5$ cm și cealaltă divergentă cu $f_2 = -10$ cm se află la 20 cm una de alta. Cele două lentile au axa optică comună. Se așază un obiect la 12 cm de lentila convergentă. Determinați mărimea și poziția imaginii finale.
Trasați mersul razelor de lumină.

16

Un obiect se află la 20 cm în stânga unei lentile cu $f_1 = +10$ cm. O altă lentilă, cu $f_2 = +12{,}5$ cm, se află la 30 cm în dreapta primei lentile.
a) Găsiți poziția imaginii finale și mărirea liniară.
b) Verificați concluziile construind grafic imaginile (la scară).

1.3 OCHIUL

Din punct de vedere anatomic ochiul este un organ deosebit de complex, prin intermediul căruia imaginile corpurilor se transformă în senzații vizuale. Globul ocular (fig. 1.40) are forma aproape sferică cu diametrul de aproximativ 2,5 cm.

Membrana exterioară a ochiului – *sclerotica,* este opacă peste tot cu excepția porțiunii din față, care este transparentă și de formă sferică, numită *cornee.*

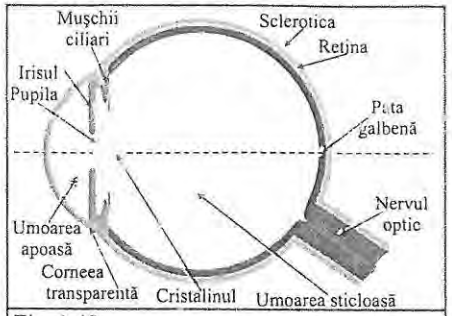


Fig. 1.40

Lumina pătrunde în ochi prin cornee, străbate cele trei medii transparente: *umoarea apoasă, cristalinul* și *umoarea sticloasă* și cade pe retină unde se formează o imagine reală și răsturnată a obiectelor privite.

Irisul este o membrană (ai cărei pigmenți dau culoarea ochilor) care în centru are o deschidere circulară de diametru variabil numită *pupilă.* La lumină prea intensă irisul își micșorează pupila pentru a proteja retina (procesul se numește *adaptare*).

Retina are o membrană subțire formată din celule senzoriale (terminații ale nervului optic), care percep lumina, numite *conuri* și *bastonașe.*

Conurile sunt celule specializate în perceperea luminii din timpul zilei capabile să dea senzații diferite pentru diferite culori. *Bastonașele* sunt specializate în perceperea luminii de intensitate slabă practic incapabile să distingă culorile.

Sub acțiunea reflexă a mușchilor ochiului, globul ocular se rotește astfel încât imaginea să se formeze în regiunea retinei numită *pata galbenă.*

Cristalinul are forma unei lentile biconvexe (nesimetrică) și poate fi mai bombat sau mai puțin bombat (sub acțiunea mușchilor ciliari) modificându-și astfel convergența încât imaginea să se formeze pe retină. El are o structură stratificată, spre margine indicele de refracție este aproximativ 1,38 iar spre interior 1,41.

Vedem obiecte aflate la distanțe diferite față de ochi datorită capacității de *acomodare* a cristalinului.

Un ochi normal are focarul situat pe retină. Imaginea obiectelor situate la infinit (practic la distanțe mai mari de 15 m) se formează pe retină fără nici un efort de modificare a convergenței cristalinului (fig. 1.41).

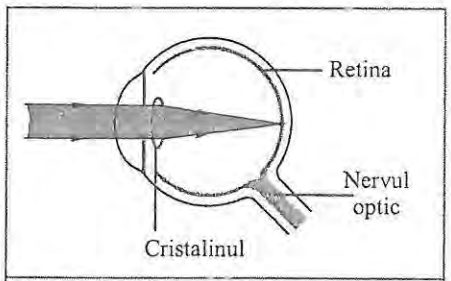


Fig. 1.41

Apropiind obiectul, cristalinul se bombează (*fenomenul de acomodare*) astfel încât imaginea să rămână tot pe retină.

Cristalinul însă nu se poate bomba oricât și de aceea obiectul poate fi adus doar până la o anumită distanță minimă – *distanța minimă de vedere* – sub care ochiul nu mai poate forma imaginea pe retină.

Acomodarea ochiului este deci posibilă între un punct aflat la o distanță maximă (*punctul remotum*) care, pentru ochiul normal este la infinit (practic, peste 15 m) și un punct aflat la o distanță minimă (*punctul proximum*). Pentru ochiul normal punctul proximum este de 10-15 cm la tineri și aproximativ 25 cm la adulți.

Un ochi normal distinge cele mai multe detalii ale unui obiect dacă acestea se află la o distanță de aproximativ 25 cm, numită *distanța vederii optime* (δ).

1.3.1 DEFECTE DE VEDERE

Miopia

Ochiul miop este mai alungit decât cel normal. Ochiul miop nu vede clar obiectele îndepărtate, imaginea punctelor de la infinit se formează în fața retinei deoarece focarul se află în fața retinei (fig. 1.42).

Apropiind mai mult obiectul, ochiul poate păstra, prin acomodare, imaginea pe retină până la o distanță minimă de aproximativ 5 cm. Ochiul miop are deci punctul remotum cât și punctul proximum mai apropiate decât ochiul normal. El nu poate vedea clar obiecte mai depărtate decât punctul său remotum.

Miopia se corectează cu *lentile divergente* al căror focar se află în punctul remotum al ochiului miop (fig. 1.43).

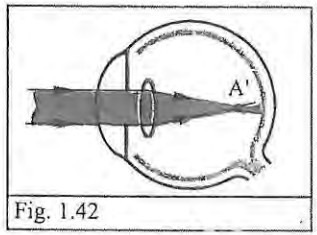


Fig. 1.42

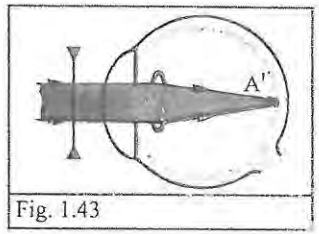


Fig. 1.43

Hipermetropia

Ochiul hipermetrop este "mai turtit" decât ochiul normal astfel încât focarul său se află în spatele retinei (fig. 1.44). În stare relaxată imaginea obiectelor de la infinit se formează în spatele retinei. Prin acomodare (bombarea cristalinului) el poate să aducă imaginea pe retină. Distanța minimă la care poate vedea este mai mare decât la ochiul normal. Hipermetropia se corectează cu *lentile convergente* (fig. 1.45).

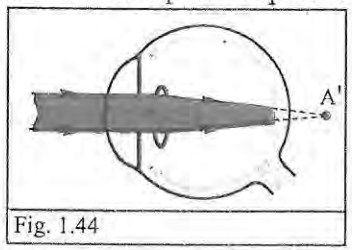


Fig. 1.44

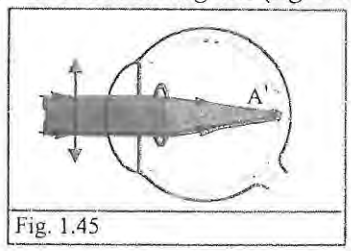


Fig. 1.45

Prezbitismul apare la persoanele în vârstă datorită slăbirii capacității de bombare a cristalinului.
Ochiul prezbit are *punctul proximum* mai depărtat decât ochiul normal.Obiectele mai apropiate vor avea imaginile în spatele retinei.
Pentru corectarea prezbitismului se folosesc *lentile convergente,* care măresc convergența ochiului ca și în cazul ochiului hipermetrop.

Ochiul poate avea și alte defecte (exemplu: astigmatismul). Căutați informații despre alte defecte de vedere și explicați în ce constau ele.

1.4 INSTRUMENTE OPTICE

Instrumentele optice sunt dispozitive folosite pentru obținerea imaginilor unor obiecte. Ele au în alcătuirea lor oglinzi, lentile, prisme optice. După natura imaginilor date, instrumentele optice se clasifică în:
- instrumente care dau *imagini reale,* ce pot fi proiectate pe un ecran sau prinse pe un film fotografic (aparatul de fotografiat, aparatul de proiecție, ochiul etc.).
- instrumente care dau *imagini virtuale.* Aceste instrumente sunt folosite pentru examinarea directă a obiectelor (lupa, microscopul, telescopul, luneta etc.).

Caracteristici ale instrumentelor optice

Caracteristicile optice sunt mărimi care permit compararea a două instrumente optice de același tip în scopul alegerii instrumentului care corespunde cerințelor practice.
Mărirea transversală (β) definită prin relația:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} \qquad (1.27)$$

unde $|y_2|$ este lungimea imaginii dată de instrument, iar $|y_1|$ este lungimea obiectului măsurate pe o direcție perpendiculară pe axa optică.

Observație:
➢ Noțiunea de mărire transversală prezintă interes, în special, în cazul instrumentelor care dau imagini reale ale căror dimensiuni pot fi măsurate.
Puterea optică (P) este definită prin relația:

$$P = \frac{tg\alpha_2}{y_1} \qquad (1.28)$$

unde α_2 este unghiul sub care se vede obiectul prin instrumentul optic, iar y_1 este dimensiunea liniară transversală a obiectului.

Observație:
➢ Puterea optică se folosește mai ales în cazul instrumentelor care dau imagini virtuale.
Grosismentul (G) sau mărirea unghiulară este definit prin relația:

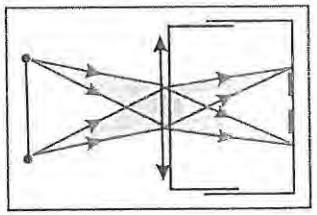
$$G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} \qquad (1.29)$$

unde α_2 este unghiul sub care se vede obiectul prin instrumentul optic (diametrul aparent al imaginii), iar α_1 este unghiul sub care se vede obiectul când este privit cu ochiul liber (diametrul aparent al obiectului) dacă este așezat la distanța vederii optime ($\delta = 0{,}25$ m).
Puterea separatoare este capacitatea instrumentului de a forma imagini distincte (separate) a două puncte vecine ale obiectului. Ea poate fi exprimată prin distanța minimă între două puncte ale obiectului care dau imagini diferite în instrument.

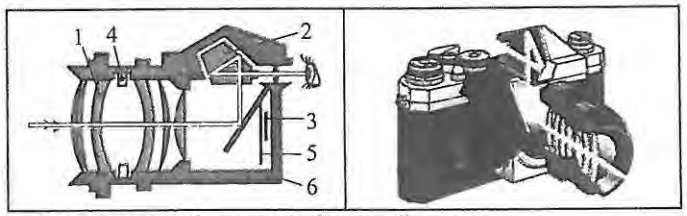
1.4.1 APARATUL DE FOTOGRAFIAT

Principiul de funcționare

O cameră obscură, echipată cu o diafragmă reglabilă, formează o imagine răsturnată a unui obiect, mai mult sau mai puțin clară și puțin luminoasă. Adaptându-i-se o lentilă convergentă, camera dă o imagine clară, luminoasă și răsturnată. Acesta este principiul aparatului de fotografiat.



Alcătuirea și funcționarea aparatului de fotografiat



Părțile componente ale unui aparat de fotografiat sunt:
- *cutia* (6), care este închisă astfel încât să nu pătrundă lumina; pe interior este neagră pentru a evita difuzia luminii. Ea are rol de cameră obscură.
- *obiectivul* (1) este alcătuit dintr-o lentilă convergentă sau un ansamblu de lentile convergente a cărui distanță focală este de câțiva centimetri (5 cm pentru aparatele obișnuite).
- *o diafragmă* (4) reglabilă, aflată în spatele obiectivului, a cărei deschidere variază prin glisarea unor lamele montate una peste cealaltă.

• *obturatorul* (5) aflat în apropierea peliculei fotografice, care împiedică pătrunderea luminii atunci când nu se fotografiază. Apăsând declaşatorul se deschide obturatorul un timp scurt şi pelicula primeşte lumină.

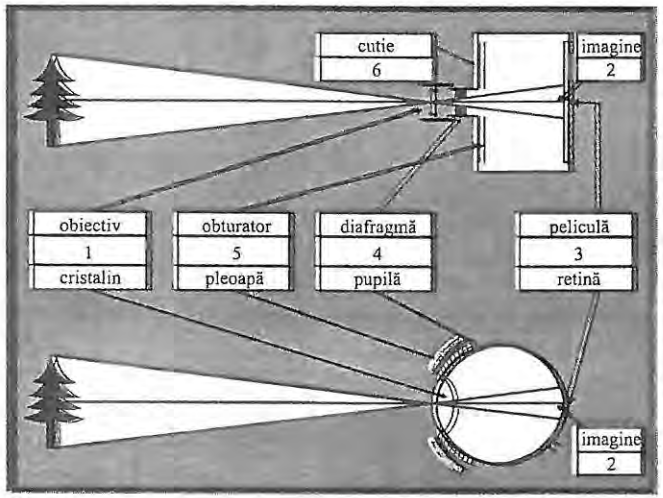
• *un sistem de vizualizare* (2) care permite fotografului să vadă ce va fotografia, să încadreze corect şi să realizeze diferite reglaje.

Pelicula fotografică (3) este un film din plastic, acoperit cu un strat de granule microscopice, pe care lumina provoacă o reacţie chimică. Imaginea va fi astfel înregistrată pe peliculă chiar dacă este invizibilă. Pentru a apărea imaginea, pelicula trebuie să sufere un tratament chimic, numit *developare*.

În funcţie de filmul utilizat, se obţin diapozitive sau un negativ, după care se pot face fotografii pe hârtie fotografică.

Aparatul de fotografiat, ca şi ochiul, înregistrează imaginea unor obiecte.

Analizaţi imaginea următoare şi descrieţi comparativ rolul fiecărei părţi componente a aparatului de fotografiat şi a ochiului.



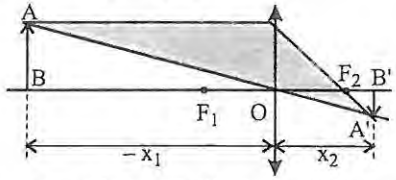
Problemă rezolvată

Un fotograf se află la distanţa de 40 m de o clădire a cărei înălţime este de 30 m. Obiectivul aparatului său de fotografiat are distanţa focală de 28 mm. Ce înălţime va avea imaginea acestei clădiri pe pelicula fotografică?

$y_1 = AB = 30\,m$
$f = 28 \cdot 10^{-3}\,m$
$x_1 = -40\,m$
$A'B' = ?$

Aplicăm legea lentilelor:

$$-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}; x_2 = \frac{x_1 f}{x_1 + f}$$



$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot y_1 = \frac{f y_1}{x_1 + f}$$; numeric: $y_2 \cong -21$ mm; $A'B' = |y_2| = 21$ mm

Reglarea aparatului de fotografiat

Pentru a obţine o fotografie cât mai bună trebuie îndeplinite următoarele condiţii:

• imaginea să se formeze exact pe pelicula fotografică şi să fie clară;

• pelicula să primească o cantitate de lumină bine determinată.

În acest caz, înainte de fotografierea unui obiect, sunt necesare câteva reglaje (care se fac fie manual, fie automat).

Pe obiectivele unor aparate de fotografiat există inele de reglaj:

• inelul pentru reglarea diametrului diafragmei (1);

• inelul de punere la punct pentru reglarea distanţei dintre obiectiv şi peliculă (2);

• inelul pentru reglarea profunzimii câmpului (3);

Profunzimea câmpului este distanţa între punctul cel mai apropiat şi punctul cel mai depărtat de aparat a căror imagine este clară.

Unele aparate de fotografiat sunt prevăzute şi cu un dispozitiv pentru reglarea vitezei de obturare.

Reglarea distanţei obiectiv-peliculă (punerea la punct a aparatului)

Obiectul de fotografiat nu este întotdeauna la aceeaşi distanţă faţă de aparatul de fotografiat. Distanţa lentilă-imagine depinde de distanţa lentilă-obiect – legea lentilelor: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$

Punerea la punct constă în reglarea distanţei peliculă-obiectiv în funcţie de depărtarea la care se află obiectul ce se fotografiază. Ea se realizează prin învârtirea inelului 2 (în care se află obiectivul).

Reglarea cantităţii de lumină

Cantitatea de lumină necesară impresionării peliculei fotografice depinde de sensibilitatea peliculei (care este indicată pe ambalajul ei). Cu cât este mai sensibilă cu atât este necesară mai puţină lumină. Cantitatea de lumină se reglează prin alegerea corespunzătoare a timpului de expunere şi a diametrului deschiderii diafragmei.

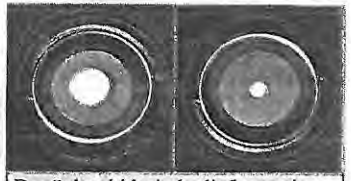
Reglarea timpului de expunere

Timpul de expunere (care este inversul vitezei de obturare) este timpul cât obturatorul rămâne deschis. Cu cât timpul de expunere este mai mare cu atât pelicula primeşte mai multă lumină. Dacă timpul de expunere este mai mare de 1/30 s este recomandat să se fixeze aparatul de fotografiat pe un trepied. Dacă obiectul ce se fotografiază este în mişcare timpul de expunere trebuie să fie foarte scurt.

Reglarea deschiderii diafragmei

Deschiderea diafragmei este dată de numărul "n" aflat pe inelul diafragmelor. Cu cât numărul n este mai mare cu atât deschiderea diafragmei este mai mică.

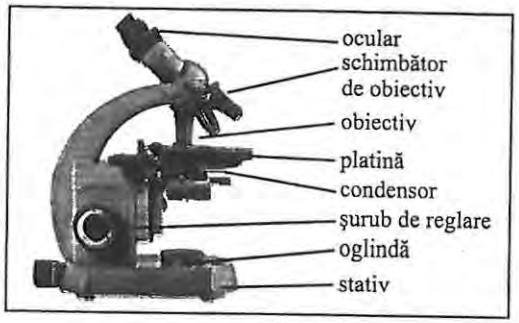
Reglarea deschiderii diafragmei şi a timpului de expunere sunt corelate între ele. Aceeaşi cantitate de lumină ajunge pe peliculă, dacă deschiderea diafragmei este mai mică, dar timpul de expunere este mare şi invers.


Două deschideri ale diafragmei

1.4.2 MICROSCOPUL

Microscopul permite observarea obiectelor prea mici pentru a fi văzute cu ochiul liber.

Părțile principale ale microscopului sunt obiectivul și ocularul.



Obiectivul, partea îndreptată spre obiect este o lentilă convergentă (sau un ansamblul de lentile convergente) cu distanța focală foarte mică (de câțiva milimetri).

Ocularul, partea îndreptată către ochi este o lentilă convergentă (sau un ansamblu de lentile convergente) având rolul unei lupe.

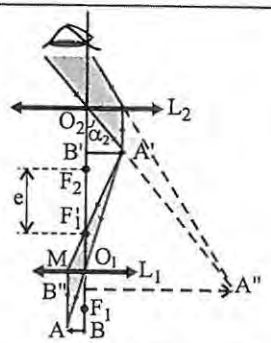
Obiectivul și ocularul au axa optică principală comună.

Obiectul ce trebuie observat (foarte subțire și fixat între două lamele de sticlă) se așază pe platină. Platina are o deschidere circulară în centru prin care obiectul este iluminat. Oglinda și condensorul concentrează lumina asupra obiectului. Pentru o observare microscopică trebuie reglată iluminarea și trebuie deplasată platina microscopului (cu șurubul de reglare) până când, prin ocular, se observă imaginea obiectului studiat.

Formarea imaginii în microscop

Obiectul AB este așezat în apropierea focarului F_1 al obiectivului (L_1). Imaginea A'B' dată de obiectiv este reală, răsturnată și mărită. Ea se formează între focarul F_2 al ocularului și ocular (L_2) aproape de F_2. A'B' constituie obiect pentru lentila L_2. Imaginea A"B" dată de ocular este virtuală, dreaptă și mărită.

Propagarea luminii prin microscop



Construcția imaginii unui obiect dată de microscop

Puterea optică a microscopului: $P = \frac{tg\alpha_2}{y_1}$

unde: $y_1 = AB$, $tg\alpha_2 = \frac{A''B''}{O_2B''} = \frac{A'B'}{O_2B'}$

$O_2B' \simeq f_2$ (distanța focală a ocularului), deci: $tg\alpha_2 = \frac{A'B'}{f_2}$, $P = \frac{A'B'}{f_2 \cdot AB}$

Din asemănarea triunghiurilor $A'B'F_1'$ și O_1MF_1', considerând $F_1'B' \simeq e$

obținem $\frac{A'B'}{AB} = \frac{e}{f_1}$, unde f_1 este distanța focală a obiectivului, iar $e = F_1'F_2$

$$\boxed{P \simeq \frac{e}{f_1 \cdot f_2}} \qquad (1.30)$$

Puterea microscopului, crește deci, cu creșterea convergențelor obiectivului și ocularului.

Valoarea lui "e" este stabilită de fiecare observator prin operația de punere la punct, prin care deplasează ocularul până când vede clar imaginea A"B".

Grosismentul microscopului: $G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}$

unde: $tg\alpha_2 = \frac{A'B'}{f_2}$, $tg\alpha_1 = \frac{AB}{\delta}$ rezultă: $G = \frac{A'B'}{f_2} \cdot \frac{\delta}{AB}$

$$\boxed{G = P \cdot \delta} \qquad (1.31)$$

unde δ este distanța vederii optime.

Puterea separatoare a microscopului este în cel mai bun caz egală cu 0,2μm.

Problemă rezolvată

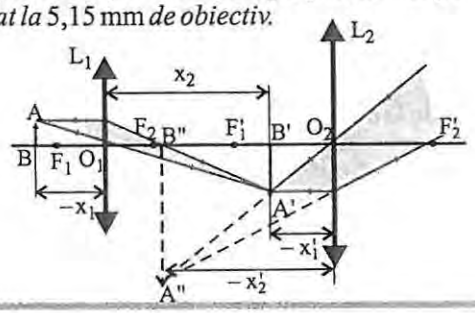
Obiectivul unui microscop poate fi asimilat cu o lentilă subțire convergentă cu distanța focală $f_1 = 5$ mm, *iar ocularul său cu o lentilă subțire convergentă cu distanța focală* $f_2 = 20$ mm. *Cele două lentile au aceeași axă optică principală, iar distanța dintre focarele lor este* e = 160 mm. *Determinați poziția și mărimea imaginii* A"B" *a unui obiect* AB *cu lungimea de* 0,02 mm *așezat perpendicular pe axa optică principală a sistemului și aflat la* 5,15 mm *de obiectiv.*

$f_1 = 5$ mm
$f_2 = 20$ mm
$F_2F_1' = e = 160$ mm
$AB = 0{,}02$ mm
$x_1 = -5{,}15$ mm

$x_2' = ?$
$A''B'' = ?$

Aplicăm legea lentilelor pentru lentila L_1:

$$-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1}$$



rezultă $x_2 = 171,(6)$ mm.

Dar $O_1B' + B'O_2 = f_1 + f_2 + e \Rightarrow x'_1 = -(f_1 + f_2 + e - x_2)$

Numeric: $x'_1 = -13,(3)$ mm

Aplicăm legea lentilelor pentru lentila L_2: $-\frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x'_2 = -40$ mm (imagine virtuală).

$$\beta = \frac{y'_2}{y_1} = \beta_1 \cdot \beta_2 \Rightarrow y'_2 = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot y_1 = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x'_2}{x'_1} \cdot y_1$$

Numeric: $y'_2 = -2$ mm (imaginea finală este răsturnată)

PROBLEME

1

Copiați și completați frazele următoare cu cuvinte din lista următoare: pupilă, culoare, iris, lumină, obiect, ochi.

a) În vederea nocturnă, ochiul nu distinge...

b) Un... care nu emite... nu este văzut de...

c)... este o diafragmă. El își modifică diametrul . . . și deci cantitatea de lumină care pătrunde în ochi.

2

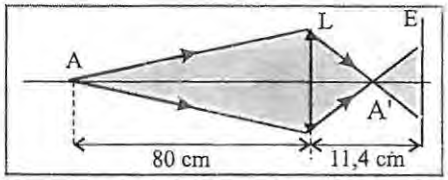
Ce explicație puteți da expresiei "noaptea toate pisicile sunt negre".

3

Privind un coleg care poartă ochelari poți să-ți dai seama ce fel de lentile au ochelarii săi (divergente sau convergente) fără să-i ceri informații referitoare la defectul său de vedere?

4

Mihai a realizat o experiență prin care a simulat corectarea miopiei. El a folosit o sursă de lumină (A), o lentilă convergentă L cu convergența $C = +20\ \delta$ și un ecran pe care le-a așezat ca în figura de mai jos.



a) La ce distanță ar trebui așezat ecranul pentru a observa clar imaginea?

b) Ce convergență are lentila pe care Mihai a așezat-o în fața lentilei L pentru a obține imaginea A' pe ecran?

5

Doi prieteni, unul miop și celălalt hipermetrop, vin unul spre celălalt pe aceeași stradă. Care dintre ei îl observă primul pe celălalt?

6

Un miop nu vede distinct decât obiecte situate la o distanță între 25 cm și 7,5 cm

față de ochi. Care trebuie să fie convergența lentilelor ochelarilor săi pentru a putea vedea clar obiecte situate la infinit?

7

Un elev, când citește, ține cartea la distanța de 40 cm față de ochi. Ce convergență trebuie să aibă lentilele ochelarilor cu care va putea citi ținând cartea la distanța vederii optime?

8

Primele aparate de fotografiat erau foarte simple. Ele aveau o cutie neagră prevăzută cu burduf și o lentilă convergentă echipată cu o diafragmă. Imaginea se forma pe o placă de sticlă acoperită cu un strat sensibil.

a) Faceți o schemă a aparatului descris.

b) Ce distanță focală are o lentilă cu convergența de 20 dioptrii?

c) Care este rolul burdufului cutiei negre a aparatului?

d) Un fotograf vrea să fotografieze cu acest aparat un copil cu înălțimea de 1 m aflat la 3 m de lentilă. Cum trebuie să regleze fotograful burduful cutiei negre pentru a obține o imagine clară pe placa de sticlă? Reprezentați schematic mersul razelor de lumină.

9

Există obiective cu distanța focală variabilă numite "zoom". Ele înlocuiesc un număr mare de obiective a căror distanță focală poate varia între 85 mm și 205 mm. Care este utilitatea unui "zoom" pentru un aparat fotografic? Dar în cazul unei camere de luat vederi?

10

Un aparat fotografic este adesea echipat cu un obiectiv cu distanța focală de 50 mm. Arătați, cu ajutorul unei scheme, că atunci când aparatul este echipat cu un teleobiectiv cu distanța focală 200 mm imaginea obținută pe peliculă este de 4 ori mai mare decât în cazul obiectivului cu distanța focală de 50 mm.

11

Numărul n corespunzător deschiderii diafragmei se obține prin raportul dintre distanța focală (f) a obiectivului, și diametrul D al deschiderii diafragmei ($n = f/D$).

Copiați și completați tabelul:

f (mm)	50		50
D (mm)	8,93	6,25	
n		8	16

12

Ocularul unui microscop are distanța focală de 2 cm, iar obiectivul de 0,6 cm. Obiectul care se examinează se află la distanța de 5/8 cm în fața obiectivului, iar imaginea dată de microscop este observată la distanța vederii optime (25 cm). Calculați:

a) puterea optică a microscopului;

b) grosismentul microscopului;

c) distanța dintre lentile.

13

Obiectivul și ocularul unui microscop au fiecare distanța focală de 6 mm și se găsesc la distanța de 20,6 cm unul de altul. Știind că imaginea finală se formează la infinit, calculați:

a) distanța de la obiectiv la obiectul studiat;

b) mărirea liniară a obiectivului;

c) puterea optică a microscopului;

d) grosismentul microscopului.

TEST

I

Alegeți varianta corectă și completați frazele următoare:

a) Privit din apă, vârful unui pom pare *mai sus / mai jos* decât în realitate deoarece apa are indicele de refracție . . . decât indicele de refracție al aerului.

b) Miopia este un defect de vedere care constă în imposibilitatea de a vedea clar obiectele *îndepărtate / apropiate* deoarece imaginea lor se formează *în spatele / în fața* retinei și puterea de acomodare redusă a . . . nu permite aducerea imaginii pe retină.

c) Lentilele cu o față convexă și una concavă *au / nu au* todeauna distanța focală negativă deoarece 1,5p

II

Notați litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Un corp care se apropie de o oglindă plană cu viteza de 10 cm/s, față de oglindă, are viteza imaginii sale în raport cu obiectul:

A	B	C
20 cm/s	10 cm/s	0 cm/s

0,5p

2. Într-un vas cu apă se află două monede identice, depărtate una de alta, moneda mai apropiată fiind privită de un observator sub un unghi mai mic. Adâncimea aparentă la care vede observatorul moneda apropiată comparativ cu adâncimea la care vede moneda mai depărtată este:

A	B	C
mai mare	mai mică	egală

1p

3. Folosind o oglindă sferică se obține o imagine dreaptă a feței unui observator, mărită de 4 ori, la distanța de 50 cm față de ochiul acestuia. Tipul oglinzii și raza ei de curbură sunt:

A	B	C
concavă; R = – 40 cm	convexă; $R = \frac{20}{3}$ cm	concavă; $R = -\frac{80}{3}$ cm

2p

III

Pe fundul unui vas cu apă se află o oglindă plană circulară având diametrul d. La ce înălțime, deasupra centrului oglinzii, în apă (n = 4/3), trebuie plasată o sursă luminoasă punctiformă pentru ca diametrul petei luminoase formată pe suprafața apei să aibă valoarea maximă? 2p

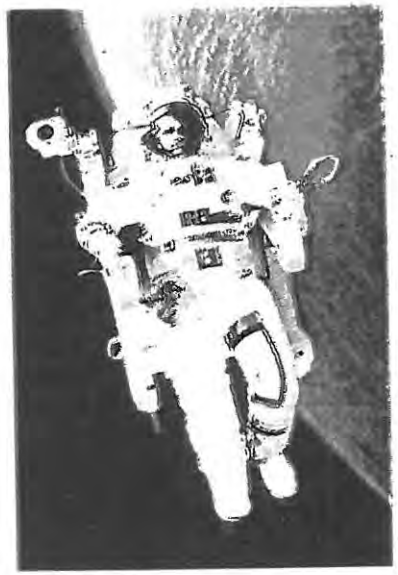
IV

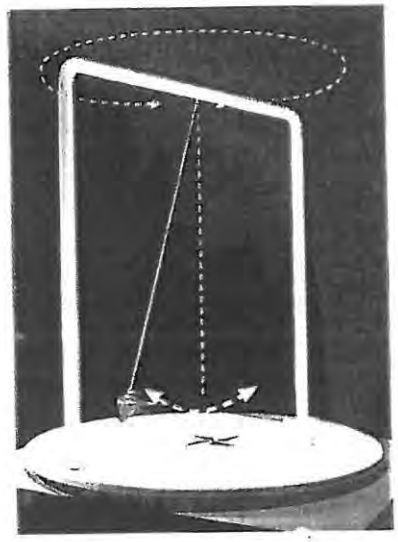
Două lentile convergente subțiri (L_1 și L_2) având distanțele focale $f_1 = 20$ cm și respectiv $f_2 = 30$ cm sunt centrate pe axa optică la distanța d = 80 cm una de alta. Un obiect luminos liniar se află la 30 cm de prima lentilă, perpendicular pe axa optică. Determinați natura, poziția și mărimea imaginii finale.
Reprezentați mersul razelor de lumină. 2p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute.

2

PRINCIPII ȘI LEGI ÎN MECANICA NEWTONIANĂ





2.1 MIŞCARE. REPAUS

Sistem de referinţă

Un tren trece printr-o staţie (Fig. 2.1).
Un călător C_1, aflat în tren, priveşte pe fereastră. Observatorul O_1 se află pe peron, iar observatorul O_2 este aşezat în tren. Pentru observatorul O_1, călătorul C_1 este în mişcare de la dreapta spre stânga având aceeaşi viteză ca şi trenul, în timp ce pentru observatorul O_2 călătorul C_1 este în repaus.
Un călător C_2 este pe peron. Pentru observatorul O_1 el este în repaus; pentru observatorul O_2 el se mişcă (de la stânga la dreapta) în sens opus trenului cu viteza egală cu viteza trenului.

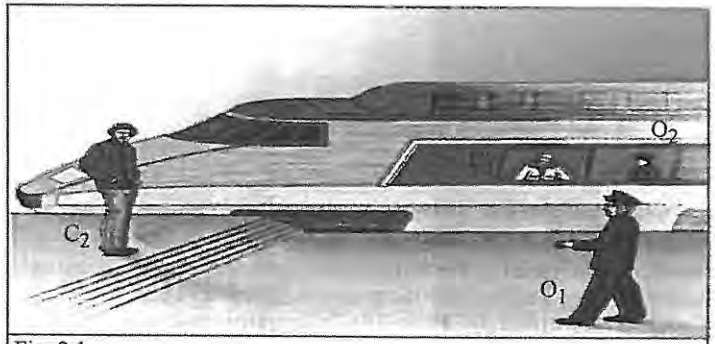


Fig. 2.1

Pentru a preciza dacă un corp este în mişcare sau în repaus trebuie ales un reper.
Reperul (corpul de referinţă) este corpul considerat fix faţă de care se determină la un moment dat poziţia sistemului fizic studiat.
Un corp este în mişcare faţă de un reper dacă îşi modifică continuu poziţia faţă de acesta. Repausul este un caz particular al mişcării.
Poziţia unui corp în timpul mişcării, faţă de un reper, se modifică în timp. Un ceasornic legat de reper permite precizarea momentului acţiunii.

Sistemul de referinţă (SR) este ansamblul format din reper, riglă pentru determinarea poziţiei şi ceasornicul pentru indicarea momentului acţiunii.

Observaţie:
➢ Un obiect poate fi în mişcare faţă de un sistem de referinţă şi în repaus faţă de alt sistem de referinţă; *mişcarea este relativă.*

Punct material

În anumite situaţii, pentru a preciza poziţia unui corp la un moment dat nu este necesar să se precizeze poziţia fiecărei părţi a corpului.

Exemple:
➢ Pentru a indica poziţia unui elicopter aflat în zbor deasupra unui oraş la un moment dat, nu este necesar să precizăm poziţia fiecărei părţi a acestuia. Putem alege un singur punct de pe elicopter căruia să-i analizăm mişcarea şi să obţinem toate informaţiile despre mişcarea elicopterului (fig. 2.2).

Fig. 2.2

➢ Mişcarea planetelor în jurul Soarelui poate fi studiată simplificat neglijând rotaţia lor în jurul propriilor axe (fig. 2.3).

Fig. 2.3

Pentru a simplifica studiul mişcării unui corp reprezentăm întregul corp printr-un punct, neglijându-i forma şi dimensiunile (în raport cu sistemul de referinţă ales), punct a cărui masă este egală cu masa corpului. Se obţine astfel un model numit *punct material.*

Observaţie:
➢ Acelaşi corp poate fi considerat punct material într-o situaţie, iar într-o altă situaţie nu. Astfel, mişcarea elicopterului deasupra unui ocean poate fi considerată cea a unui punct material, poziţia lui în fiecare moment fiind dată de coordonatele geografice, latitudine şi longitudine. Dacă urmărim aterizarea elicopterului pe un aeroport, într-un spaţiu limitat, mişcarea lui nu poate fi redusă la cea a unui punct material.

Daţi exemple de situaţii în care acelaşi corp poate fi considerat punct material sau nu.

Traiectorie

Traiectoria mişcării unui punct material este ansamblul poziţiilor succesive pe care le ocupă acesta în timpul mişcării faţă de sistemul de referinţă ales.

Traiectoria se desenează unind reprezentările poziţiilor succesive prin care trece punctul material (fig. 2.4).

Fig. 2.4

Observații:

➢ Traiectoria depinde de sistemul de referință ales pentru descrierea mișcării corpului.

Exemplu:

Între două foi de hârtie f_1, respectiv f_2, punem o coală de indigou. Trasăm o dreaptă pe foaia f_1 din O. În același timp deplasăm foaia f_2 (fig. 2.5).

Ce formă are traiectoria vârfului creionului față de sistemul de referință legat de foaia f_1? Dar față de sistemul de referință legat de foaia f_2?

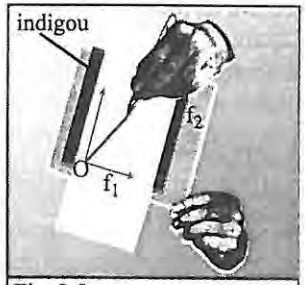


Fig. 2.5

➢ Față de același sistem de referință, două puncte ale aceluiași corp au traiectorii diferite.

Exemplu:

Un automobil se mișcă pe o șosea dreaptă (fig. 2.6). Punctele A și B sunt alese pe caroseria automobilului, punctul C pe axul roții, iar punctul D pe valva camerei.

Trasați traiectoriile punctelor B, C și D față de un sistem de referință legat de Pământ.

Fig. 2.6

După forma traiectoriei mișcarea unui punct material poate fi:

- *mișcare rectilinie* – traiectoria este o dreaptă (fig. 2.7);
- *mișcare curbilinie* – traiectoria este o curbă (fig. 2.8).

Dacă traiectoria este un cerc mișcarea se numește *mișcare circulară* (fig. 2.9).

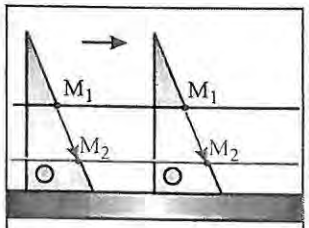


Fig. 2.7

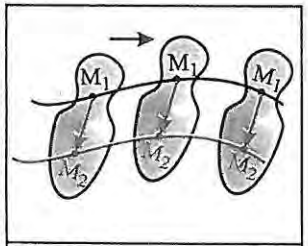


Fig. 2.8

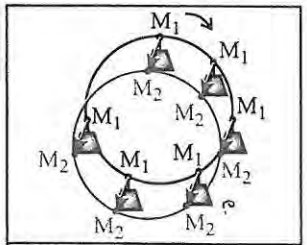


Fig. 2.9

Coordonate. Vector de poziție

Mișcarea rectilinie a unui punct material poate fi reprezentată pe o axă (dreapta pe care am fixat originea O, care corespunde reperului, un sens și o unitate de măsură) (fig. 2.10).

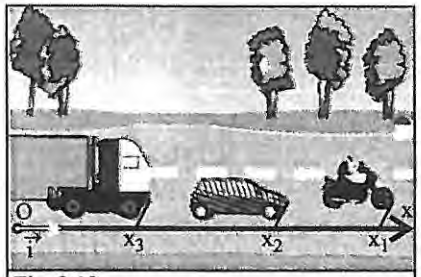


Fig. 2.10

Ca orice punct pe o axă punctul material are o coordonată.
Poziția unui punct material față de un reper la un moment dat este precizată de *coordonata* (x) la momentul respectiv.
Coordonata se exprimă în *metri* (unitatea de măsură a lungimii în S.I.).
Când un punct material M se află în mișcare, coordonata sa se modifică în timp.

Exemplu:

O patinatoare lunecă pe suprafața unui patinoar considerat plan.
Traiectoria descrisă de patinatoare rămâne vizibilă pe suprafața gheții (fig. 2.11).
Pentru a descrie mișcarea patinatoarei *în plan* alegem un sistem de două axe de coordonate Ox și Oy perpendiculare între ele (de exemplu axele care reprezintă marginile unui patinoar dreptunghiular).

Poziția unui punct material M *în plan* la momentul t este dată de coordonatele x (abscisa) și y (ordonata).

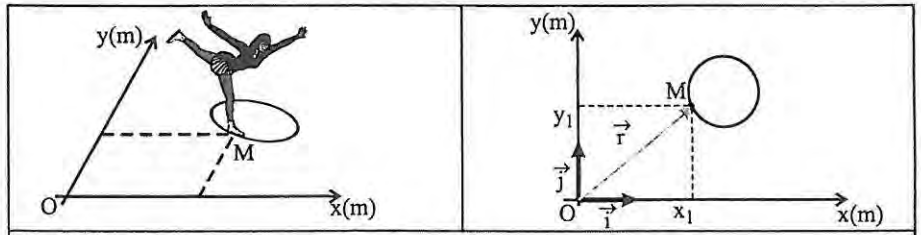


Fig. 2.11

Mişcarea unui punct material *în spaţiu* se reprezintă într-un sistem de trei axe de coordonate Ox, Oy şi Oz perpendiculare între ele (fig. 2.12).

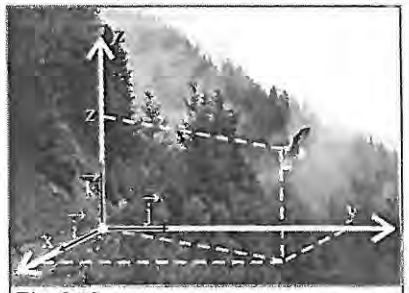


Fig. 2.12

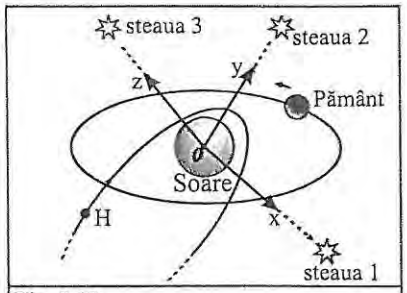


Fig. 2.13

Observaţie:

➢ Putem descrie mişcarea unui punct material şi cu ajutorul altor sisteme de coordonate (de exemplu, coordonatele geografice: latitudinea, longitudinea, altitudinea).

Pentru a studia mişcarea planetelor sau a sondelor spaţiale se alege un *reper heliocentric* a cărui origine coincide cu centrul Soarelui, iar cele trei axe au direcţia spre trei stele îndepărtate considerate fixe (fig. 2.13).

Poziţia unui punct material (M) la un moment dat se poate preciza şi cu ajutorul unui *vector de poziţie* ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$).

| Definiţi vectorul. Care sunt caracteristicile unui vector?

Vectorul de poziţie al unui punct material la un anumit moment este vectorul care are originea în originea sistemului de axe de coordonate şi vârful în punctul de pe traiectorie unde se reprezintă punctul material la acel moment.

Proiecţiile vectorului de poziţie pe axe determină coordonatele punctului material la momentul considerat.

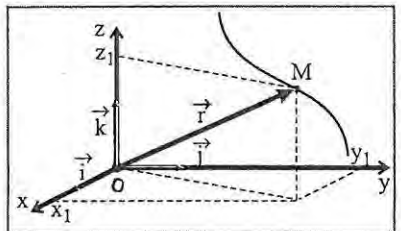


Fig. 2.14

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt *versori* (vectori asociaţi axelor de coordonate al căror modul este egal cu unitatea).

PROBLEME

1

Sunteţi în repaus faţă de Pământ. Precizaţi care dintre elementele corpului vostru se pot afla în mişcare faţă de Pământ.

2

Încercaţi să reproduceţi mişcarea în raport cu solul a unui punct de pe roata unei maşini aflată în mişcare rectilinie. Pentru aceasta folosiţi o rotiţă pe care fixaţi un punct. Rostogoliţi rotiţa de-a lungul unei rigle aşezată pe o foaie de hârtie şi trasaţi traiectoria punctului.

3

Pe o bicicletă se fixează o lampă roşie pe pneu, una verde pe pedală şi una galbenă pe cadru. Desenaţi, folosind aceleaşi culori, traiectoriile lămpilor bicicletei aflată în mişcare rectilinie uniformă, având ca reper:

a) solul;

b) cadrul bicicletei.

4

Care dintre caracteristicile vectorului de poziţie se modifică în situaţia în care punctul material descrie:

a) un cerc cu centrul în originea S.R.;

b) o dreaptă ce pleacă din originea S.R.;

c) o spirală ce porneşte din originea S.R.

5

După ce şi-au instalat tabăra, vânătorii au plecat la vânătoare de urşi mergând spre sud. Au parcurs 10 km şi şi-au schimbat direcţia, mergând spre est încă 10 km unde vânează un urs. Îndreptându-se spre nord au parcurs 10 km, ajungând la tabără. Ce culoare are ursul vânat? Justificaţi răspunsul după ce veţi descoperi locul unde şi-au instalat tabăra.

6

La începutul unui concurs de orientare se indică participanţilor traseul care trebuie urmat: din punctul de plecare O, se parcurg 800 m spre nord, apoi 200 m spre est, 300 m spre sud, 1,3 km spre vest, 400 m spre sud, 300 m spre est şi în final 500 m spre nord, ajungând astfel în punctul final T. Fie un sistem de coordonate cu originea O şi axele Ox şi Oy pe direcţiile vest-est şi sud-nord cu sensul spre est pentru Ox şi spre nord pentru Oy.

a) Trasaţi, în sistemul ales, traiectoria unui concurent care a străbătut traseul indicat, la scara 1 / 10 000.

b) Indicaţi coordonatele x_T şi y_T ale punctului final T.

c) Reprezentaţi vectorul de poziţie al punctului T ($\overrightarrow{OT}$);

d) Calculaţi modulul vectorului $\overrightarrow{OT}$ pe schiţă şi în realitate.

e) Modulul vectorului este egal cu distanţa parcursă de participanţi? Comparaţi cele două valori.

7

Un supraveghetor de zbor, plasat într-un turn de control T, urmăreşte pe o hartă mişcarea unui avion A. Se consideră că avionul zboară tot timpul la aceeaşi altitudine, pe direcţia est-vest spre est. Se alege un reper legat de turnul T ale cărui axe sunt orientate

astfel: Tx spre est şi Ty spre nord.

A. La un moment t_1 avionul se găseşte la N-V de turn, coordonatele sale în reperul ales fiind: $x_1 = -300$ km şi $y_1 = 400$ km. La scara 1cm → 100 km:

a) reprezentaţi vectorul de poziţie al avionului ($\vec{r_1}$) la momentul t_1 şi calculaţi-i modulul.

b) Reprezentaţi traiectoria avionului.

B. Un al doilea turn de control T' se află faţă de T în punctul de coordonate x = 800 km şi y = – 600 km.

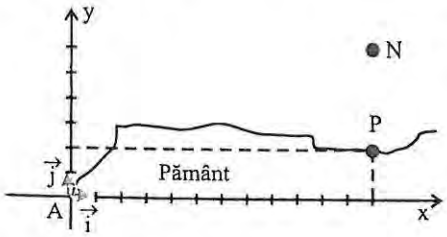
a) Ce distanţă este între cele două turnuri de control?

b) Fie reperul T'x'y', având axele paralele cu reperul Txy şi cu acelaşi sens. Care sunt, la momentul t_1, coordonatele avionului în reperul T'x'y'?

c) La un moment dat t_2 avionul se află la egală distanţă de cele două turnuri. Determinaţi poziţia avionului la momentul t_2 faţă de T'.

8

O şalupă pleacă din portul A pentru a întâlni nava N aflată în dificultate. În figură sunt reprezentate poziţiile punctelor A şi N pe schiţa executată la scara 1 / 200 000.



Alegem ca reper portul A. În tabelul următor este indicată poziţia şalupei la diferite momente de timp, prin coordonatele x şi y exprimate în km.

t	16h 00 min	16h 02 min	16h 04 min	16h 06 min	16h 08 min	16h 10 min	16h 11 min	16h 12 min	16h 14 min	16h 16 min	16h 18 min
x	0	0	0	0	0	2	3	4	6	8	10
y	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4

A) Trasaţi traiectoria şalupei.

B) La ora 16 şi 14 minute:

a) Reprezentaţi vectorul de poziţie $\vec{r}$ al şalupei;

b) Ce distanţă a parcurs şalupa de la plecarea din port?

c) Ce modul are vectorul de poziţie $\vec{r}$?

d) Ce distanţă mai are de parcurs şalupa pentru a ajunge la nava N, considerată în repaus faţă de pământ?

C) Şalupa aduce naufragiaţii pe plajă în punctul P ale cărui coordonate sunt $x_P = 12$ km şi $y_P = 2$ km.

a) Reprezentaţi punctul P pe o schemă. La ce distanţă de navă se găseşte el?

b) Care sunt coordonatele punctului P într-un reper legat de nava N (aleasă ca origine) şi ale cărui axe sunt paralele şi au acelaşi sens cu cele ale reperului legat de portul A?

9

Un mobil M se deplasează pe un cerc cu centrul I şi raza R = 45 cm, pe care-l veţi reprezenta schematic la scara 1/10. Mobilul este iniţial în punctul M_0.

a) Reprezentaţi noua poziţie M_1 a mobilului, dacă se roteşte cu 90° în sens trigonometric. Calculaţi distanţa parcursă.

b) Pornind din M_1 mobilul se deplasează cu 94,2 cm în sensul acelor de ceasornic. Reprezentaţi noua poziţie, M_2.

c) Cu ce unghi trebuie să se rotească în sensul acelor de ceasornic pentru a se întoarce în M_1? Ce distanţă a parcurs mobilul din M_2 în M_1?

2.1.1 VITEZA. VECTORUL VITEZĂ

Viteza este o noţiune care ne este familiară.

Un conducător auto care a parcurs 180 km în trei ore va spune firesc că a avut o „viteză medie" de 60 km/h. În timpul călătoriei el trebuia să respecte restricţiile de viteză. De exemplu, în localitate nu trebuia să depăşească 50 km/h.

Astfel, conducătorul auto distinge clar cele două mărimi fizice: viteza medie şi viteza instantanee (momentană).

Viteza medie (v_m) se calculează făcând raportul dintre distanţa parcursă de punctul material şi durata parcurgerii acestei distanţe.

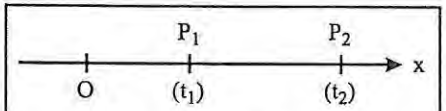
$$v_m = \frac{\text{distanţa parcursă}}{\text{durata mişcării}}$$

Unitatea de măsură a vitezei în S.I.: $[v_m]_{S.I.} = m/s$

Observaţie:

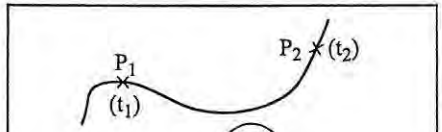
➢ În mişcarea rectilinie distanţa parcursă este egală cu lungimea segmentului ce uneşte poziţia iniţială P_1, cu poziţia finală P_2 a punctului material (fig. 2.15).

În mişcarea curbilinie distanţa parcursă se măsoară pe curbă (fig. 2.16).



$$v_m = \frac{\overline{P_1P_2}}{t_2 - t_1}$$

Fig. 2.15



$$v_m = \frac{\overset{\frown}{P_1P_2}}{t_2 - t_1}$$

Fig. 2.16

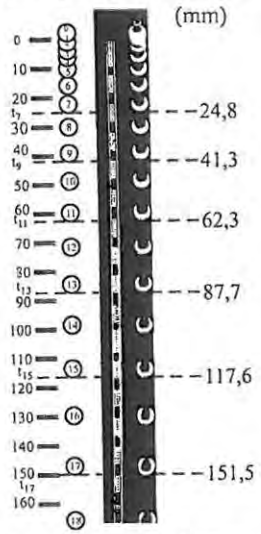
Viteza înregistrată de un vitezometru (fig. 2.17) sau de un radar (fig. 2.18) reprezintă valoarea *vitezei instantanee* (momentană) a vehiculului.

Fig. 2.17

Fig. 2.18

Probleme rezolvate

În imaginea de mai jos este reprezentată mişcarea verticală a unei bile care cade liber. Bila este fotografiată la intervale de 1/30 s.
Calculaţi viteza instantanee a bilei la trecerea prin poziţiile 8, 10, 12, 14.



Fie $A_1, A_2, ..., A_{15}$ poziţiile succesive ale bilei la momentele $t_1, t_2, ..., t_{15}$.
Astfel:

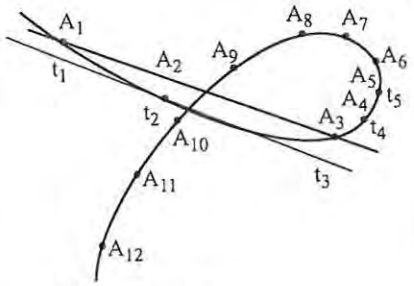
$$v_8 \approx \frac{A_7A_9}{t_9 - t_7} = \frac{1{,}6}{\frac{2}{30}} = 24 \text{ cm/s}$$

Asemănător: $v_{10} \cong 30$ cm/s

$v_{12} \cong 37$ cm/s $\quad v_{14} \cong 43$ cm/s

Viteza bilei creşte, deci mişcarea este accelerată.

Punctul A al unui mobil descrie o traiectorie de forma celei din imagine. Poziţiile succesive $A_1, A_2, A_3, ..., A_{12}$ sunt înregistrate la un interval de timp de $2 \cdot 10^{-2}$ s. Calculaţi viteza instantanee la momentul t_2.



$$v_2 \cong \frac{\overset{\frown}{A_1A_3}}{t_3 - t_1} \cong \frac{\overline{A_1A_3}}{t_3 - t_1}$$

$t_3 - t_1 = 40$ ms $\qquad A_1A_3 = 3{,}7$ cm

$$v_2 = \frac{3{,}7 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 10^{-3}} = 0{,}925 \text{ m/s}$$

Tabelul 2.1 *Exemple de valori ale unor viteze*

viteza electronilor într-un fir de cupru parcurs de curent electric	≅ 0,1 mm/s	viteza sunetului în aer la 15°C	≅ 330 m/s (1200 km/h)
viteza unui atlet într-o cursă de 100 m	10,1 m/s (36,5 km/h)	viteza Pământului în mişcarea sa în jurul Soarelui	30 km/s
viteza unui ciclist într-o oră (record mondial în 1993: 52,272 km/h)	14,5 m/s (52,3 km/h)	viteza electronilor într-un tub de televizor	≅ 50 000 km/s
viteza maximă a unei maşini de formula 1	≅ 83 m/s (300 km/h)	viteza luminii în vid	300 000 km/s

Care din vitezele exemplificate în tabelul 2.1 sunt viteze momentane?

Valoarea vitezei instantanee poate fi aproximată calculând viteza medie între două puncte foarte apropiate. Dacă viteza instantanee este constantă spunem că mişcarea este *uniformă*. Mişcarea este *accelerată* dacă viteza instantanee creşte şi *încetinită* dacă viteza instantanee scade.

„Un automobil se află într-o intersecţie pe care o traversează cu viteza de 20 km/h" (fig. 2.19)

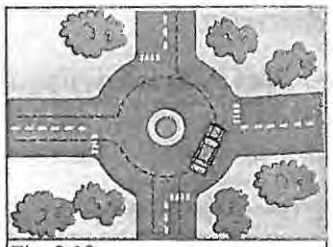


Fig. 2.19

Această afirmaţie nu ne permite să precizăm care este direcţia şi sensul de mişcare al automobilului.
În concluzie, valoarea vitezei instantanee este insuficientă pentru descrierea mişcării.
Mişcarea unui punct material este caracterizată de *mărimea fizică vectorială* numită *viteză*.

Un punct material se mişcă pe o traiectorie curbilinie (fig. 2.20). P_1 şi P_2 sunt două poziţii ale punctului material la momentele t_1, respectiv t_2 ($t_1 < t_2$). Acestor poziţii le corespund vectorii de poziţie $\vec{r_1}$ şi respectiv $\vec{r_2}$.
Deplasarea punctului material în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, în raport cu sistemul de referinţă considerat este reprezentată prin *vectorul deplasare*:

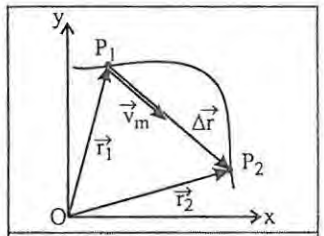


Fig. 2.20

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}} \qquad (2.1)$$

Definiţi operaţia de scădere a doi vectori şi precizaţi proprietăţile ei.

Vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ este caracterizat de:

- *modulul* $|\Delta\vec{r}|$ – lungimea segmentului P_1P_2;
- *direcţia* – dreapta ce trece prin punctele P_1 şi P_2;
- *sensul* – sensul mişcării mobilului (de la P_1 la P_2).

Viteza medie ($\vec{v}_m$) este mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre deplasarea punctului material ($\Delta\vec{r}$) şi intervalul de timp (Δt) în care s-a produs această deplasare.

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \qquad (2.2)$$

Definiţi operaţia de înmulţire a unui vector cu un scalar şi precizaţi proprietăţile acesteia.

Vectorul viteză medie are direcţia şi sensul vectorului deplasare şi modulul:

$$v_m = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

Unitatea de măsură a vitezei în S.I.: $[v_m]_{S.I.} = m/s$

Observaţie:

➢ Dacă intervalul de timp Δt este foarte mic ($\Delta t \to 0$) punctul P_2 se apropie de punctul P_1 şi se determină viteza mobilului într-un punct şi respectiv la un moment dat numită *viteză instantanee* ($\vec{v}$).

Viteza instantanee (momentană) ($\vec{v}$) este mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre deplasarea mobilului ($\Delta\vec{r}$) şi intervalul de timp corespunzător (Δt) când Δt tinde la zero:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left[\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0} = \left[\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0}} \qquad (2.3)$$

Vectorul viteză momentană are:
- *direcţia*: tangentă la traiectorie în punctul considerat;
- *sensul* este dat de sensul mişcării punctului material la acel moment;
- *modulul*: $v = \left[\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0}$ (2.4)

Definiţi unitatea de măsură în S.I. a vitezei.
Depinde vectorul viteză instantanee de S.R. ales? Exemplificaţi.

Proiectând punctul material pe axele de coordonate, mişcarea sa curbilinie se descompune în mişcări rectilinii după axele de coordonate. Vitezele mişcărilor componente sunt componentele vectorului viteză $\vec{v}(\vec{v}_x, \vec{v}_y)$.

În cazul *mişcării rectilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}_m$ sunt situaţi chiar pe dreapta mişcării. Alegem axa Ox pe dreapta mişcării. Dacă sensul mişcării este acelaşi cu sensul pozitiv al axei, proiecţia vitezei pe această axă este pozitivă (fig. 2.21). Dacă punctul material se deplasează în sensul negativ al axei, proiecţia vitezei pe axă este negativă (fig. 2.22).

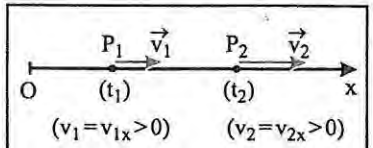


Fig. 2.21

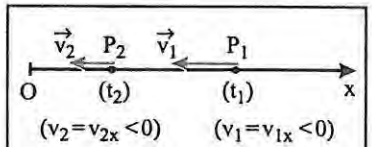


Fig. 2.22

Dacă vectorul viteză este constant în timpul mişcării spunem că punctul material are o *mişcare rectilinie uniformă*. În acest caz viteza medie coincide cu viteza instantanee $\vec{v}_m = \vec{v}$.

2.1.2 LEGEA MIŞCĂRII RECTILINII UNIFORME (facultativ)

Relaţia matematică ce exprimă dependenţa coordonatei de poziţie de timp reprezintă **legea de mişcare** şi este de forma: $x = f(t)$

"Un mobil se mişcă rectiliniu şi uniform cu viteza v. *Coordonata de poziţie a mobilului la momentul iniţial* t_0 *este* x_0. *Care este coordonata de poziţie a mobilului la momentul* t? *Reprezentaţi grafic această mişcare."*

$$v = \text{const.} \Rightarrow v = v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

Legea mişcării rectilinii uniforme: $\boxed{x = x_0 + v(t - t_0)}$ (2.5)

Observaţie:

➢ Pentru simplificarea notaţiei am scris v în loc de v_x (proiecţia lui $\vec{v}$ pe Ox aleasă pe dreapta mişcării).

Cu această precizare:
$v_x = v > 0$, când mobilul se mişcă în sensul axei.
$v_x = v < 0$, când mobilul se mişcă în sens opus axei.

Graficul mişcării rectilinii uniforme este o dreaptă (fig. 2.23):

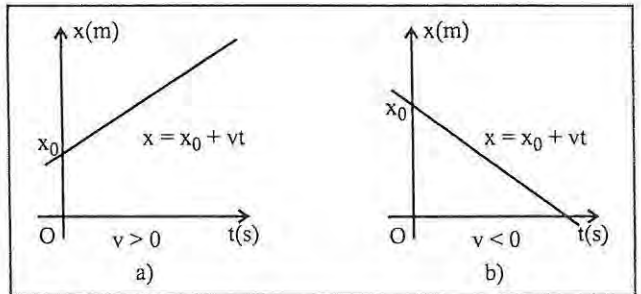


Fig. 2.23

În care din cele două situații (a sau b) reprezentate în fig. 2.23 mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei ?

Verificarea experimentală a legii mişcării rectilinii uniforme

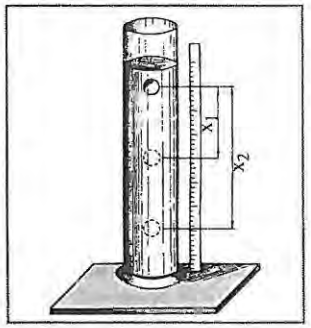
Lucrați în grup.

Verificarea experimentală a legii mişcării rectilinii uniforme a unei sfere mici, din aluminiu, într-o mensură plină cu ulei, se poate face măsurând distanțele parcurse x_1, x_2, ..., de la aceeaşi origine şi timpii corespunzători t_1, t_2, ... Se calculează de fiecare dată vitezele sferei pe fiecare interval:

$v_1 = x_1/t_1$, $v_2 = x_2/t_2$, ...

Se repetă experimentul determinând adâncimea la care mişcarea devine uniformă.

Ce erori pot interveni în experiment?



Probleme rezolvate

1

Un mobil se află în mişcare rectilinie de-a lungul unei axe (Ox). *Legea mişcării mobilului este:* $x(t) = -4{,}5t + 4$, *unde* x *este exprimat în metri şi* t *în secunde.*

1) Ce reprezintă valoarea numerică 4 ?

2) Ce fel de mişcare are mobilul ?

Exprimați vectorul viteză $\vec{v}$.

Rezolvare:

1) Valoarea 4 reprezintă coordonata de poziție (inițială) la momentul $t_0 = 0$ (originea timpului) $t_0 = 0$; $x_0 = 4$m

2) Legea de mişcare fiind o funcție liniară, mişcarea mobilului este rectilinie uniformă.

Să arătăm că mobilul parcurge distanțe egale în intervale de timp egale.

La momentul $t_1 \Rightarrow x_1 = -4{,}5t_1 + 4$

La momentul $t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow x_2 = -4{,}5(t_1 + \Delta t) + 4$

La momentul $t_3 = t_1 + 2\Delta t \Rightarrow x_3 = -4{,}5(t_1 + 2\Delta t) + 4$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x_2 = x_3 - x_2 = -4{,}5\Delta t \\ \Delta x_1 = x_2 - x_1 = -4{,}5\Delta t\end{array}\right. \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta x_2$$

Din definiția vitezei: $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -4{,}5$m/s

Deci vectorul viteză: $\vec{v} = -4{,}5\vec{i}$ ($\vec{i}$ este versorul axei Ox)

Observație:

➢ Semnul "–" indică faptul că mişcarea mobilului se face în sens opus sensului axei.

2

Pe şoseaua Bucureşti-Braşov, pleacă din Bucureşti un camion cu viteza constantă $v_1 = 50$ km/h. *Din Ploieşti pleacă în acelaşi sens un alt camion, cu viteza constantă* $v_2 = 1$ km/min, *după o oră şi* 30 *minute de la plecarea primului camion. Ştiind că distanța Bucureşti-Ploieşti este* 60 km, *să se afle după cât timp şi în ce loc se vor întâlni.*

Rezolvare:

$v_1 = 50$ km/h

$v_2 = 1$ km/min

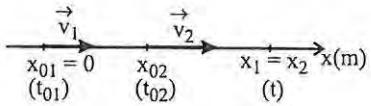
$t_{01} = 0$ h

$t_{02} = 1$ h 30 min

$x_{02} = 60$ km

$t = ?$

$x_1 = x_2 = ?$



Legile de mişcare ale celor două corpuri:

$x_1 = x_{01} + v_1(t - t_{01})$; dar $x_{01} = 0$; $t_{01} = 0$; deci $x_1 = v_1 t$

$x_2 = x_{02} + v_2(t - t_{02})$

Punând condiția de întâlnire ($x_1 = x_2$) rezultă:

$v_1 t = x_{02} + v_2(t - t_{02})$

$t = \dfrac{v_2 t_{02} - x_{02}}{v_2 - v_1}$; $t = 3$h şi $x_1 = x_2 = 150$ km. Camioanele se întâlnesc după 3 h de la plecarea camionului din Bucureşti, la 150 km față de Bucureşti.

3

Viteza de curgere a apei unui râu este $v_1 = 3$m/s. *Un înotător înaintează perpendicular pe malul râului cu viteza* $v_2 = 4$m/s, *față de apă. Ce viteză are înotătorul' față de mal ? În ce punct de pe malul opus ajunge înotătorul dacă lățimea râului este* 12 m*?*

Rezolvare:

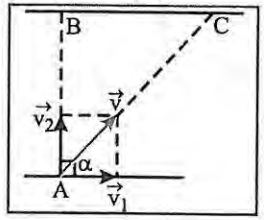
Viteza înotătorului față de mal este: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$; $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}$

$\cos\alpha = \cos 90° = 0$; rezultă: $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$; $v = 5$ m/s

Înotătorul se va deplasa pe direcția AC.

$AB = v_2t$; $BC = v_1t \Rightarrow BC = v_1\frac{AB}{v_2}$; $BC = 9$ m

Fata de punctul B înotatorul ajunge în punctul C. (BC = 9 m)



2.1.3 MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

Într-un S.R. dat, un punct material are o mișcare circulară, dacă traiectoria sa este un cerc. Poziția unui punct material A_1 pe traiectorie la un moment dat (t_1), poate fi precizată cu ajutorul vectorului de poziție al punctului față de centrul cercului, numit și *rază vectoare* ($\vec{r}_1$). Alegând pe traiectorie un punct origine A_0 și un sens de parcurgere a traiectoriei (de exemplu sensul opus acelor de ceasornic), poziția punctului A_1 poate fi precizată indicând unghiul la centru $\sphericalangle\ \theta_1 = (OA_0, OA_1)$, numit și *coordonată unghiulară* (fig. 2.24).

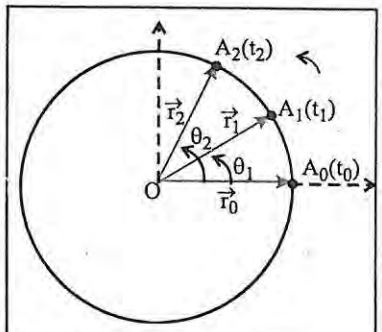


Fig. 2.24

$$[\theta]_{S.I.} = \text{rad (radian)}$$

Un radian este unghiul la centru care subîntinde un arc de cerc cu lungimea egală cu raza cercului.

Viteza unghiulară medie în timpul $\Delta t = t_2 - t_1$ în care raza vectoare descrie unghiul la centru $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ este dată de raportul:

$$\boxed{\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \qquad (2.6)$$

Unitatea de măsură a vitezei unghiulare în S.I.: $[\omega_m]_{S.I.} = \frac{rad}{s}$

Dacă intervalul de timp tinde la zero se obține *viteza unghiulară instantanee* (momentană):

$$\omega(t) = \left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0} = \left[\frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0}$$

În *mișcarea circulară uniformă* viteza unghiulară este constantă, punctul material parcurgând arce egale în intervale de timp egale.

Legea mișcării circulare uniforme obținută din definiția vitezei unghiulare este:

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)} \qquad (2.7)$$

unde θ este coordonata unghiulară la momentul t, iar θ_0 la momentul t_0.

În mișcarea circulară uniformă modulul vitezei este constant ($v_1 = v_2$).

Lungimea arcului descris de punctul material A în timpul $\Delta t = t_2 - t_1$ este: $\overset{\frown}{A_1A_2} = r \cdot \Delta\theta$, unde r este raza cercului, iar Δθ este unghiul la centru corespunzător arcului $\overset{\frown}{A_1A_2}$.

Dar $\overset{\frown}{A_1A_2} = v \cdot \Delta t$, unde v este modulul vitezei liniare, iar $\Delta t = t_2 - t_1$ durata mișcării.

Din cele două relații se obține legătura între viteza liniară și viteza unghiulară:

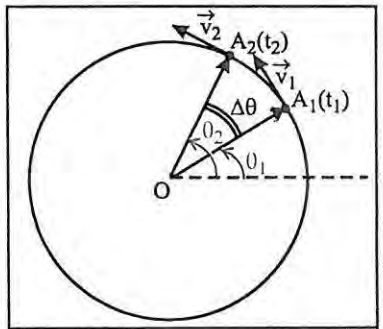


Fig. 2.25

$$\boxed{v = \omega \cdot r} \qquad (2.8)$$

Mișcarea circulară uniformă este *periodică*, adică se repetă după ce mobilul a parcurs o circumferință completă.

Perioada mișcării circulare uniforme (T) este timpul în care punctul material descrie o circumferință completă.

Din relația între perioadă și viteza unghiulară: $2\pi = \omega \cdot T$, rezultă:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad (2.9)$$

Frecvența de rotație (ν) reprezintă numărul de rotații efectuate în unitatea de timp:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}} \quad \boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}} \qquad (2.10)$$

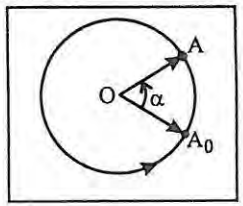
Unitatea de măsură a frecvenței în S.I. este: $[\nu]_{S.I.} = \frac{1}{s} = \text{Hz}$ (hertz)

Probleme rezolvate

1

Un mobil descrie o mișcare circulară, poziția sa fiind indicată la diferite momente prin valoarea unghiului α.

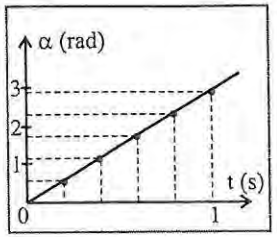
t(s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
α(grade)	0	34	68	102	136	170



1) Reprezentați grafic dependența unghiului α de timp, cu α exprimat în radiani și timpul în secunde.
2) Găsiți relația care există între α și t.
3) Calculați: viteza unghiulară, frecvența și perioada de rotație.

Rezolvare:
1) Se exprimă unghiul α în radiani folosind corespondența 2π rad = 360° și tabelul de valori:

t(s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
α(rad)	0	0,59	1,19	1,78	2,37	2,97



2) Reprezentarea grafică a funcției α = f(t) este o dreaptă.

$$\alpha = 2{,}97\ t$$

Mișcarea este circulară uniformă.

3) Viteza unghiulară: $\omega = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

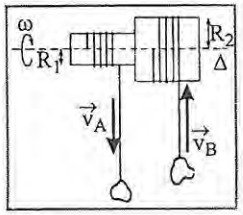
$$\omega = \frac{2{,}37 - 0{,}59}{0{,}8 - 0{,}2} = 2{,}97 \text{ rad/s}$$

Frecvența de rotație: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{2{,}97}{2\cdot\pi} = 0{,}47$ Hz

Perioada de rotație: $T = \dfrac{1}{\nu} = 2{,}11$ s

2

Sistemul schematizat în figură este alcătuit din doi cilindri solidari, coaxiali, de raze R_1 = 20 cm, respectiv $R_2 = 2R_1$. Pe fiecare cilindru este înfășurat un cablu care are la un capăt un corp. În timp ce sistemul este pus în mișcare de rotație, cele două corpuri se deplasează în sensuri opuse. Calculați viteza fiecărui corp, știind că frecvența de rotație n = 20 rot/min.



Rezolvare:
Viteza unghiulară $\omega = 2\pi n$ este aceeași pentru cei doi cilindri. Vitezele celor două corpuri au modulele:

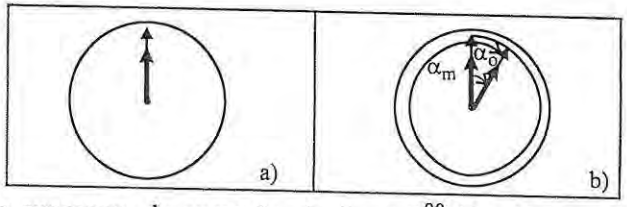
$$v_A = R_1 \cdot \omega = R_1 \cdot 2\pi n$$
$$v_B = R_2 \cdot \omega = R_2 \cdot 2\pi n$$

Numeric: n = 20 rot/min = 1/3 rot/s $v_B = 0{,}84$ m/s $v_A = 0{,}42$ m/s

3

La ora 0 acele minutar și orar ale ceasului se suprapun (fig. a). La ce ore se suprapun acele din nou? Dar când vor fi în prelungire?

Rezolvare:



Când acele se suprapun, de exemplu, după ora 1^{00} (fig. b) observăm că între unghiurile măturate de ace (α_m și α_o – unghiul măturat de minutar, respectiv de orar), există relația: $\alpha_m - \alpha_o = 1 \cdot 2\pi$

După ora 2^{00}: $\alpha_m - \alpha_o = 2 \cdot 2\pi$

Generalizând se poate spune că, pentru suprapunerea de după ora k:

$$\alpha_m - \alpha_o = k \cdot 2\pi \Rightarrow \omega_m t - \omega_o t = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{T_m} - \frac{2\pi}{T_o}\right) t = k \cdot 2\pi \Rightarrow t_k = k \cdot \frac{T_m T_o}{T_o - T_m}$$

Numeric: $t_k = k \cdot \dfrac{1h \cdot 12h}{12h - 1h} = k \cdot \dfrac{12}{11} h$

$t_1 = 12/11$ h = 1h + 5 min + 27,27 s

$t_2 = 2 \cdot 12/11$ h = 2h + 10 min + 54,54 s

⋮

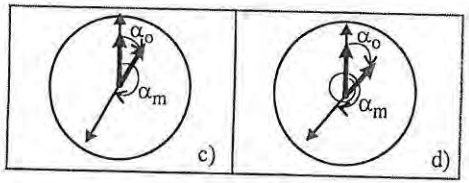
$t_{11} = 11 \cdot 12/11$ h = 12 h

Dacă acele ajung în prelungire după ora 0 (fig. c):

$$\alpha_m - \alpha_o = \pi$$

Dacă acele ajung în prelungire după ora 1 (fig. d):

$$\alpha_m - \alpha_o = 3\pi$$



Generalizând: $\alpha_m - \alpha_o = (2k+1)\pi$; $(\omega_m - \omega_o)t = (2k+1)\pi$

$$2\pi\left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_o}\right) t = (2k+1)\pi \Rightarrow t_k = (2k+1)\frac{T_m T_o}{2(T_o - T_m)}$$

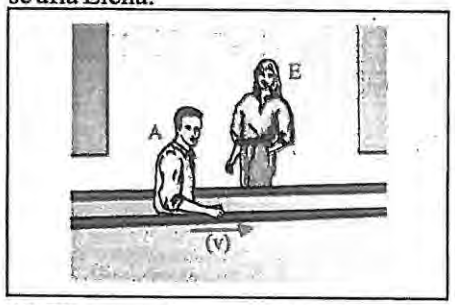
Numeric: $t_k = (2k+1)\dfrac{1h \cdot 12h}{2(12h - 1h)} = (2k+1)\dfrac{6}{11} h$

t_0 = 0h + 32 min + 43,63 s . . . t_{10} = 11h + 27 min + 16,36 s

PROBLEME

1

Andrei se află pe o bandă rulantă care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ față de sol, unde se află Elena.



A) Elena este în repaus față de sol, iar Andrei este în repaus față de scara rulantă.
a) Ce viteză are Andrei într-un S.R. legat de Elena?
b) Ce viteză are Elena într-un S.R. legat de Andrei?
c) Ce viteză are Elena într-un S.R. legat de Elena?
B) Elena este imobilă față de sol, iar Andrei pare în repaus într-un S.R. legat de Elena. Ce putem spune despre mișcarea lui Andrei într-un S.R. legat de scara rulantă?

2

În ce tip de mișcare distanța parcursă de un punct material coincide cu modulul vectorului deplasare?

3

Un mobil se deplasează pe laturile unui dreptunghi pornind dintr-unul din vârfuri.
Determinați modulul vectorului deplasare după ce mobilul parcurge:
a) două laturi;
b) trei laturi.
Lungimile laturilor sunt: $\ell_1 = 12$ cm și $\ell_2 = 5$ cm.

4

Un tren se mișcă orizontal cu viteza constantă v = 36 km/h. Un observator de pe platforma vagonului aruncă vertical, în sus, o bilă pe care o prinde după două secunde.
Determinați:
a) deplasarea bilei față de vagon în acest timp;
b) deplasarea bilei față de Pământ.

5

Un motociclist parcurge rectiliniu, pe o stradă, distanța d; face apoi un viraj cu raza R = d și intră pe altă stradă perpendiculară pe prima, pe care mai parcurge rectiliniu distanța d. Se consideră că în tot timpul mișcării modulul vitezei a fost constant v. Desenați traiectoria. Calculați distanța parcursă, modulul vectorului deplasare și modulul vitezei medii.

6

La Campionatul European de atletism din 2003, rezervat juniorilor, Cătălina Oprea a devenit campioană continentală în proba de 2000 m obstacole, realizând un nou record mondial la junioare: 6 min 21,78 s. Calculați viteza medie exprimată în m/s și km/h.

7

Kenyanul Paul Tergat a stabilit un nou record mondial, în maratonul de la Berlin (42,95 km). Tergat a câștigat în 2 ore 4 minute și 55 secunde, întrecând cu 43 de secunde recordul lui Khalid Khannonchi stabilit la Londra în 2002.
Calculați vitezele medii ale celor doi sportivi.

8

Un petrolier de 50 000 t poate atinge viteza de 17,1 noduri. Știind că un nod este viteza unei nave ce parcurge distanța de o milă marină (1852 m) în timp de o oră, calculați viteza petrolierului exprimată în m/s și km/h.

9 F

Trenul de mare viteză TGV circulă, pe o porțiune rectilinie de cale ferată între Lyon și Paris, cu viteza constantă de 270 km/h. Scrieți ecuația mișcării trenului, exprimând coordonata în metri și timpul în secunde, alegând ca reper Lyon ($x_0 = 0$ la $t_0 = 0$).

10 F

Un mobil se deplasează pe o traiectorie rectilinie cu viteza constantă de 16 cm/s. La momentul $t_1 = 5$ s, coordonata lui de poziție este $x_1 = 2$ cm. Care este coordonata sa de poziție la momentul $t_2 = 8$ s?

11

Un mobil pleacă din punctul M_1 de coordonate $x_1 = 4$ m și $y_1 = 5$ m cu viteza constantă $\vec{v}$, orientată paralel cu axa Ox având modulul v = 2 m/s. După $\Delta t = 4$ s mobilul ajunge în punctul M_2.
Determinați vectorii de poziție corespunzători punctelor M_1 și M_2.

12

Mișcarea rectilinie a unui mobil este descrisă de ecuația: $x = 20 + 4t^2$ (cm).
a) Să se afle deplasarea mobilului în intervalul de timp de la $t_1 = 2$ s la $t_2 = 5$ s.
b) Ce viteză medie a avut mobilul în acest timp?

13

Un om de înălțime h pleacă cu viteza constantă v de lângă o sursă punctiformă de lumină aflată pe sol și se mișcă spre un perete foarte înalt situat la distanța d față de sursa de lumină.
Cu ce viteză se mișcă la momentul t (de la plecarea omului), extremitatea superioară a umbrei sale pe perete?

14 F

Două mobile aflate în mișcare rectilinie uniformă trec prin același punct la un interval de 10 s unul după altul cu vitezele $v_1 = 54$ km/h și $v_2 = 25$ m/s. După cât timp și în ce loc se vor întâlni?

15 F

La finalul unei curse cicliste, doi sportivi C_1 și C_2 își dispută victoria. Ultimii 600 m sunt în linie dreaptă pe un drum orizontal.
Ciclistul C_1 se află la 500 m de linia de sosire și rulează cu viteza constantă $v_1 = 50$ km/h.
Ciclistul C_2 se află cu 70 m în urma ciclistului C_1.
a) Cu ce viteză constantă trebuie să ruleze ciclistul C_2, pentru a-l învinge pe ciclistul C_1, pe linia de sosire?
b) În realitate ciclistul C_2 rulează cu viteza constantă de 60 km/h.
Care ciclist trece primul linia de sosire?

La ce distanță de linia de sosire, se află cel de-al doilea ciclist, în momentul în care primul trece linia de sosire?

16 F

Un automobil cu lungimea de 5 m deplasându-se cu viteza $v_A = 90$ km/h ajunge în spatele unui camion a cărui lungime este L = 10 m. Viteza camionului este $v_C = 72$ km/h. Cele două vehicule își păstrează viteza constantă. Automobilul depășește camionul. Considerând că depășirea începe când bara din față a automobilului este la distanța $d_1 = 20$ m în spatele camionului și se termină când spatele automobilului este la distanța $d_2 = 30$ m în fața camionului, calculați:

a) durata depășirii;

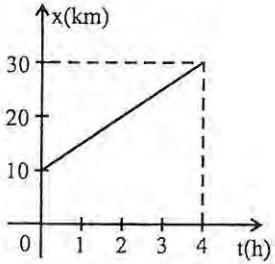
b) distanța parcursă de automobil.

17 F

În figura de mai jos este reprezentat graficul mișcării unui mobil aflat în mișcare rectilinie.

a) Descrieți mișcarea mobilului.

b) Scrieți ecuația mișcării și viteza exprimată în m/s.



18 F

Din două orașe A și B pornesc, unul spre altul, două autocamioane cu vitezele constante $v_1 = 50$ km/h, respectiv $v_2 = 70$ km/h.

Știind că distanța dintre orașe este d = 290 km și că autocamionul al doilea pleacă cu $t_0 = 1$ h mai târziu decât primul să se reprezinte grafic coordonatele celor două autocamioane ca funcții de timp și să se afle algebric și grafic locul și momentul întâlnirii lor.

19 F

Un barcagiu vrea să traverseze un râu cu lățimea L = 100 m care are malurile paralele. Apa râului curge cu viteza $v_r = 3$ m/s, iar barca are viteza v = 5 m/s față de apă.

Cât durează traversarea dacă se face:

a) pe drumul cel mai scurt ?

b) în timpul cel mai scurt ?

20 F

O macara ridică un corp cu viteza $v_1 = 1{,}08$ km/h la înălțimea h = 10 m în timp ce se deplasează cu o viteză constantă orizontală $v_2 = 0{,}4$ m/s.

Determinați:

a) timpul în care corpul ajunge la înălțimea h;

b) distanța parcursă pe orizontală în acest timp;

c) modulul vectorului deplasare.

2.1.4 ACCELERAȚIA. VECTORUL ACCELERAȚIE

În timpul mișcării, un punct material își poate modifica viteza, atât ca modul, cât și ca direcție și sens. Aceeași variație a vectorului viteză se poate produce într-un interval de timp mai lung sau mai scurt. Mărimea fizică care măsoară variația vitezei într-un interval de timp este *accelerația*.

Accelerația medie ($\vec{a}_m$) este mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre variația vitezei ($\Delta\vec{v}$) și intervalul de timp (Δt) în care s-a produs această variație.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (2.11)$$

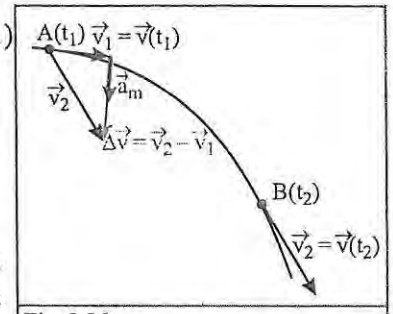


Fig. 2.26

Unitatea de măsură a accelerației în S.I.:

$$[a]_{S.I.} = \frac{[v]_{S.I.}}{[t]_{S.I.}} = \frac{m}{s^2}$$

Observație:

➢ Dacă intervalul de timp în care variază viteza este foarte scurt, $\Delta t \to 0$, accelerația calculată se numește *accelerație instantanee* sau *momentană* ($\vec{a}$).

Accelerația momentană ($\vec{a}$) este mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre variația vitezei ($\Delta\vec{v}$) și intervalul de timp (Δt) în care s-a produs această variație, când $\Delta t \to 0$.

$$\vec{a}(t) = \left[\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0} = \left[\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0} \qquad (2.12)$$

| Definiți unitatea de măsură a accelerației în S.I.: m/s^2

Observații:

➢ Vectorul accelerație în mișcarea curbilinie este îndreptat spre "interiorul" traiectoriei, adică spre partea concavă a curbei, în sensul în care deviază vârful vectorului viteză în timpul mișcării mobilului pe traiectorie.

➢ Vectorul accelerație este paralel cu vectorul viteză, numai în cazul mișcării rectilinii, când variază numai modulul vitezei, nu și direcția ei.

➢ Componenta vectorului accelerație pe o axă, reprezintă accelerația cu care se mișcă proiecția punctului material pe acea axă, de exemplu: $a_x = \left[\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0}$

➢ În cazul mișcării rectilinii, variația vectorului viteză $\Delta\vec{v}$ și vectorul accelerație $\vec{a}$, au același sens cu vectorul viteză, dacă modulul vitezei crește (*mișcare accelerată*)

(fig. 2.27) şi au sens opus vectorului viteză, dacă modulul vitezei scade (*mişcare încetinită*) (fig. 2.28).

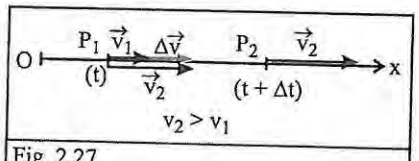


Fig. 2.27

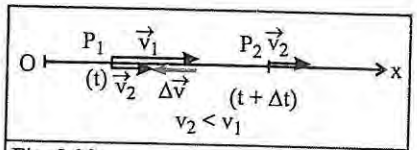


Fig. 2.28

Problemă rezolvată

Un tren care se mişcă pe o porţiune de drum rectilinie cu viteza 108 km/h *este frânat până la viteza de* 36 km/h *în* 20 secunde. *Calculaţi accelerația medie.*

$v_1 = 108$ km/h $= 30$ m/s $v_2 = 36$ km/h $= 10$ m/s $\Delta t = 20$ s	Alegem sensul pozitiv al axei în sensul vitezei. $a_m = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{10-30}{20} = -1\,m/s^2$
$a_m = ?$	Semnul minus arată că vectorul accelerație este orientat în sens opus sensului pozitiv ales; deci accelerația are sens opus vitezei (mişcare încetinită).

Vectorul accelerație momentană poate fi descompus după două direcții (fig. 2.29):
- direcția vitezei (tangentă la traiectorie) – componenta accelerației numindu-se *accelerație tangențială* ($\vec{a}_t$);
- direcția perpendiculară pe viteză (normală la traiectorie) – componenta accelerației numindu-se *accelerație normală* ($\vec{a}_n$).

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Accelerația tangențială este datorată variației modulului vitezei, iar accelerația normală este datorată modificării direcției vitezei (apare numai în mişcarea curbilinie).
În *mişcarea circulară uniformă* modulul vitezei nu se modifică, deci $\vec{a}_t = \vec{0}$, dar direcția vitezei se schimbă în fiecare moment ($\vec{a}_n \neq \vec{0}$). În acest caz accelerația normală se mai numeşte *accelerație centripetă* ($\vec{a}_{cp}$) şi este cu atât mai mare cu cât viteza (v) este mai mare şi cu cât raza de curbură (r) este mai mică (fig. 2.30).

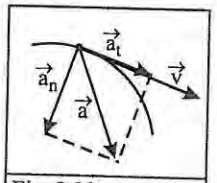


Fig. 2.29

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

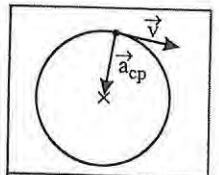


Fig. 2.30

2.1.5 LEGILE MIŞCĂRII RECTILINII UNIFORM VARIATE (facultativ)

Un punct material care se mişcă pe o traiectorie rectilinie are accelerația constantă în timp ($\vec{a} = \overrightarrow{const.}$). La momentul inițial t_0 punctul material are coordonata de poziție x_0 şi viteza v_0.
a) Care este viteza punctului material v la momentul t? Reprezentați grafic viteza în funcție de timp.
b) Care este coordonata de poziție a mobilului x, la momentul t? Reprezentați grafic mişcarea punctului material.

a) ***Legea vitezei.*** În mişcarea rectilinie uniform variată accelerația este constantă fiind egală cu accelerația medie:

$$a = const. \Rightarrow a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Legea vitezei în mişcarea rectilinie uniform variată este:

$$\boxed{v = v_0 + a(t - t_0)} \qquad (2.13)$$

Graficul vitezei în mişcarea uniform variată este o dreaptă (figura 2.31); spunem că viteza variază liniar cu timpul. Panta acestei drepte este egală cu accelerația "a".

Caz particular: considerând momentul inițial $t_0 = 0$, atunci :

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

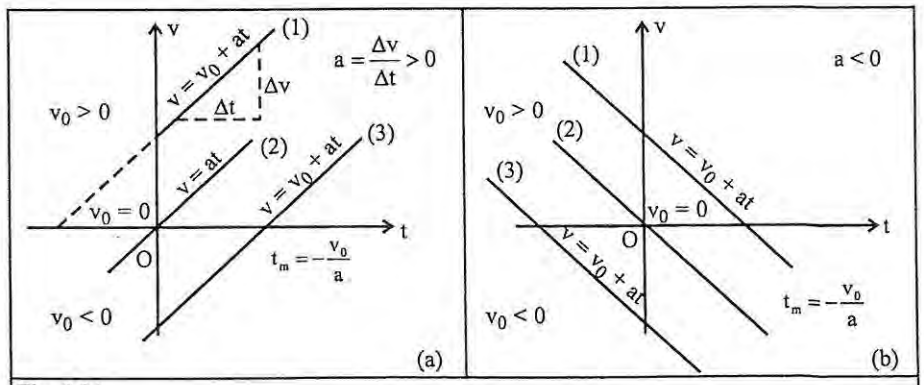


Fig. 2.31

Care din graficele (a sau b) din fig. 2.31, corespund unor mişcări uniform accelerate?

b) ***Legea mişcării***

Viteza medie în mişcarea uniform variată este media aritmetică a vitezelor iniţială şi finală (deoarece viteza variază liniar cu timpul):

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

Dar: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$ $\quad x = x_0 + v_m(t - t_0)$ $\quad x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}(t - t_0)$

unde: $v = v_0 + a(t - t_0)$

Legea mişcării rectilinii uniform variate este:

$$\boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2} \qquad (2.14)$$

Caz particular: considerând momentul iniţial $t_0 = 0$, atunci:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2}$$

Graficul mişcării este o parabolă (fig. 1.32), x(t) fiind funcţie pătratică de timp.

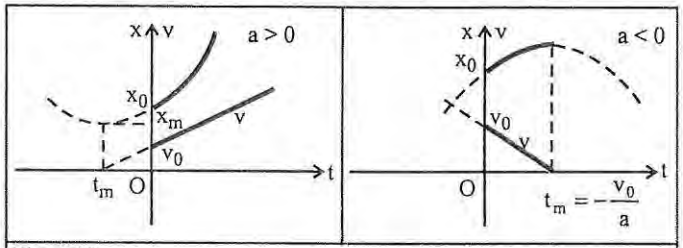


Fig. 2.32

Eliminând timpul din ecuaţiile vitezei (2.13) şi coordonatei (2.14), obţinem **ecuaţia lui Galilei**:

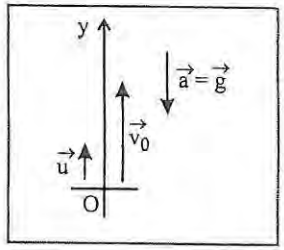
$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)} \qquad (2.15)$$

Ecuaţia (2.15) ne permite să calculăm viteza mobilului pentru orice poziţie a sa.

Problemă rezolvată

O rachetă-jucărie pleacă vertical în sus cu viteza constantă u = 5 m/s. *Din punctul de plecare al rachetei, cu* t_0 = 6 s *mai târziu, este lansată, cu o praştie, o piatră cu viteza* v_0 = 40 m/s, *tot pe verticală în sus. Considerând* g = 10 m/s^2, *frecările cu aerul neglijabile şi că piatra nu ciocneşte racheta, să se afle când şi unde se întâlnesc corpurile. Ce viteză are piatra când întâlneşte racheta-jucărie?*

Rezolvare:



Considerăm că mişcările au loc pe axa Oy ce are originea în locul din care pleacă cele două corpuri; prima mişcare este rectilinie *uniformă*, iar a doua rectilinie uniform *variată* cu $a_y = -g$ (proiecţia vectorului $\vec{a} = \vec{g}$ pe axa considerată).

Considerăm ca origine a timpului (t = 0) momentul lansării pietrei.

Legile (ecuaţiile) de mişcare ale celor două corpuri:

$$y_1(t) = u(t + t_0)$$

$$y_2(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Mobilele se întâlnesc atunci când:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow u(t + t_0) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}gt^2 + (u - v_0)t + ut_0 = 0$$

Cu datele numerice ecuaţia devine:

$$5t^2 - 35t + 30 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0$$

cu soluţiile t_1 = 1 s şi t_2 = 6 s.

Corpurile se întâlnesc de două ori în punctele de coordonate (verticale):

$$y_{i_1} = y_1(t_1) = u(t_1 + t_0) = 5(1 + 6) = 35 \text{ m}$$

şi respectiv: $\quad y_{i_2} = y_1(t_2) = u(t_2 + t_0) = 5(6 + 6) = 60 \text{ m}$

Piatra atinge o înălţime maximă: $h_{max} = y_{2_{max}} = -\frac{v_0^2}{2a_y} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{40^2}{2 \cdot 10} = 80 \text{ m}$

după un timp de urcare ("de oprire"): $t_u = t_{2,opr} = -\frac{v_0}{a_y} = \frac{v_0}{g} = \frac{40}{10} = 4 \text{ s}$

Aşadar prima întâlnire se realizează când piatra în urcare ajunge din urmă racheta-jucărie (care urcă uniform); viteza pietrei la prima întâlnire este:

$$v_1 = v(t_1) = v_0 - gt_1 = 40 - 10 \cdot 1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A doua întâlnire are loc când piatra coboară cu viteza:

$$v_2 = v(t_2) = v_0 - gt_2 = 40 - 10 \cdot 6 = -20 \text{ m/s}$$

Clasificarea mişcărilor punctului material

- Mişcarea punctului material
  - rectilinie
    - rectilinie uniformă $\vec{v} = \overrightarrow{const.}$ ($\vec{a} = \vec{0}$)
    - rectilinie variată $\vec{a} \neq \vec{0}$
      - uniform variată $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$
        - uniform accelerată
        - uniform încetinită
      - neuniformă ($\vec{a}$ este variabil)
  - curbilinie
    - curbilinie uniformă $|\vec{v}| = \overrightarrow{const.}$; $\vec{a}_t = \vec{0}$ (ex. mişcarea circulară uniformă)
    - curbilinie neuniformă

PROBLEME

1

Cablul unui ascensor se rupe la momentul în care acesta se află la ultimul etaj.
a) Ce fel de mişcare va avea cabina ascensorului faţă de Pământ?
b) Ce fel de mişcare va avea un obiect din interiorul cabinei faţă de Pământ? Dar faţă de cabina ascensorului?

2

Un autoturism îşi măreşte viteza de la v_1 = 54 km/h la v_2 = 72 km/h în intervalul de timp $\Delta t = 10$ s.
Ce accelerație medie are automobilul dacă se mişcă rectiliniu?

3

Un biciclist are la un moment dat viteza $v_1 = 4$ m/s orientată spre est. El se mişcă pe o curbă cu accelerația constantă $a = 1$ m/s^2 orientată spre sud. Ce valoare are viteza biciclistului după intervalul de timp $\Delta t = 3$ s?

4 F

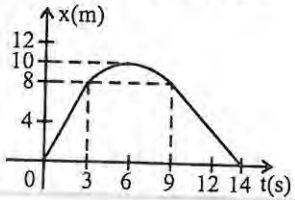
Un automobil porneşte din repaus şi atinge viteza de 72 km/h după ce străbate o distanţă de 200 m. Considerând mişcarea rectilinie uniform variată, calculaţi:
a) accelerația mişcării;
b) timpul necesar străbaterii acestei distanţe.

5

O maşină pornind din repaus atinge viteza de 108 km/h după 30 s.
Calculaţi accelerația medie.

6 F

În figură este reprezentat graficul mişcării unui mobil ce se mişcă rectiliniu.



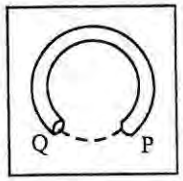
a) La ce oră îşi schimbă mobilul sensul de mişcare? Ce coordonată de poziţie şi ce viteză are în acest moment?
b) Se pot distinge trei etape ale mişcării. Caracterizaţi mişcarea mobilului în fiecare etapă.

7 F

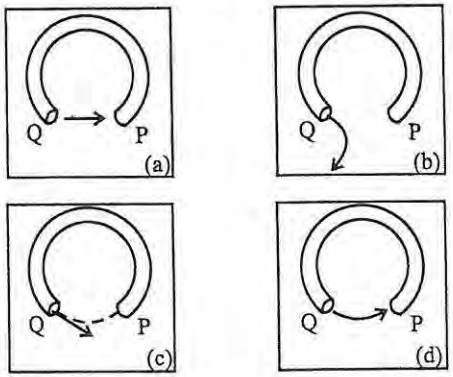
Un mobil se mişcă rectiliniu după legea: $x(t) = t^2 - 10t + 16$ (m); [t] = s.
Să se afle:
a) când şi unde se opreşte mobilul?
b) ce accelerație are mobilul atunci când se opreşte?

8

Un canal circular este aşezat pe o masă orizontală ca în schema alăturată. O bilă intră în canal prin capătul P şi îl părăseşte prin capătul Q.



Care din desenele următoare (care prezintă masa şi canalul văzute de deasupra) indică corect direcţia pe care se va deplasa bila când părăseşte canalul în punctul Q? Verificaţi printr-un experiment. Justificaţi răspunsul.



9

Un ciclist rulează cu viteza 54km/h pe o pistă circulară cu raza 50 m.
Ce viteză unghiulară şi ce frecvenţă are mişcarea?

10 F

Distanţa medie dintre Pământ şi Soare este $d = 15 \cdot 10^7$ km şi traiectoria mişcării în jurul Soarelui este aproape circulară. Să se afle viteza medie a Pământului în timpul mişcării în jurul Soarelui.

11

Diametrul roţilor unui automobil de formula 1 este de 0,5 m. Ce frecvenţă de rotaţie au roţile sale la o viteză de 226,08 km/h?

12

Ce frecvenţă de rotaţie au roţile unui vagon de cale ferată care se deplasează cu viteza de 56,52 km/h, dacă diametrul roţilor este de 1 m?

TEST

I

În care din situațiile următoare corpul poate fi considerat punct material:

a) Un avion zboară de la Craiova la București.

b) Un vapor se deplasează de la Constanța la Istanbul.

c) O mașină face manevre de întoarcere într-o curte.

d) Un sportiv încheie o cursă de maraton.

e) O locomotivă face manevre într-un depou. 1p

II

Completați enunțurile următoare astfel încât să fie corecte și complete:

a) Traiectoria este.... 0,5p

b) Expresia matematică a vitezei momentane este.... 0,5p

c) Accelerația medie este mărimea fizică vectorială.... 0,5p

III

Alegeți enunțurile corecte și reformulați-le pe cele incorecte.

a) Viteza este o mărime care nu depinde de sistemul de referință.

b) Legea vitezei exprimă viteza mobilului în orice moment.

c) În cazul mișcării în plan poziția este cunoscută dacă se precizează abscisa și ordonata mobilului.

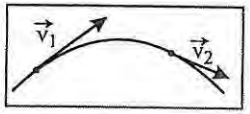
d) Accelerația momentană este $\vec{a} = \frac{\vec{v}}{t}$

e) În mișcarea rectilinie vectorul viteză este constant. 1,5p

IV

Un biciclist face un viraj de 90° cu o rază de 10 m, în timp de 2 secunde. Reprezentați traiectoria, vectorul $\vec{v}_m$ și calculați viteza medie. 2p

V



În figura alăturată sunt reprezentați vectorii viteză $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ ai unui mobil la momentele t_1, respectiv t_2.
Reprezentați pe un desen asemănător vectorul accelerație medie $\vec{a}_m$ corespunzător intervalului $\Delta t = t_2 - t_1$ 1p

VI

Legea mișcării rectilinii a unui mobil este: $x(t) = t^2 - 3t + 2$; $[x] = m$; $[t] = s$

Alegeți răspunsurile corecte:

a) Viteza medie a mobilului pe intervalul $[1, 4]$ s este $v_m = 2$ m/s

b) Mobilul trece prin origine la momentul $t = 0$

c) Legea vitezei mobilului are expresia $v(t) = 2t - 3$.

d) Coordonata inițială a mobilului este $x_0 = 2$ m. 2p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute

PRINCIPIILE MECANICII

Mecanica clasică newtoniană pe care o studiem, elaborată în esență de Isaac Newton (1643-1727) se bazează pe trei legi generale, numite *principii*. Aceste adevăruri verificate experimental timp îndelungat nu se pot demonstra teoretic. Toate celelalte legi ale mecanicii se deduc din aceste principii, ca teoreme.

2.2 PRINCIPIUL I AL MECANICII

Omul care se împiedică, se înclină înainte, iar cel care alunecă, se înclină în urmă; câinele ieșind din apă se scutură; la aterizarea și decolarea avionului este obligatoriu să-ți pui centura de siguranță; trunchiurile de copac transportate pe apa unui râu de munte se îngrămădesc la cotituri; vulpea prinde greu iepurele care își schimbă brusc direcția de mișcare. De ce?

Cauza acestor manifestări este ***inerția*** (*proprietatea generală a corpurilor de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă în absența acțiunilor exterioare și de a se opune la orice acțiune exterioară care caută să modifice această stare*).

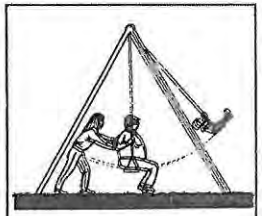


Fig. 2.33

Care dintre persoanele aflate în mișcare (fig. 2.33), pot fi oprite cu un "efort" mai mic?

Două bile, una din oțel și una din lemn, sunt suspendate fiecare, de fire cu aceeași lungime (fig. 2.34). Cu o fâșie din hârtie se încearcă punerea în mișcare a fiecărei bile. Care dintre bile este scoasă mai greu din starea de repaus? De ce? Ce relație este între masa corpului și inerția lui?

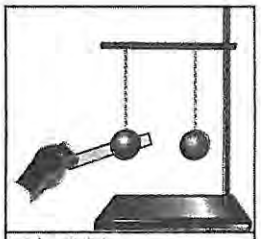


Fig. 2.34

Masa este măsura inerției corpului; de aceea se mai numește *masă inerțială*.

Căruciorul din imagine este pus în mișcare rectilinie și uniformă (fig. 2.35). Brusc, îi este schimbată direcția de mișcare.
Ce fel de mișcare are bila?

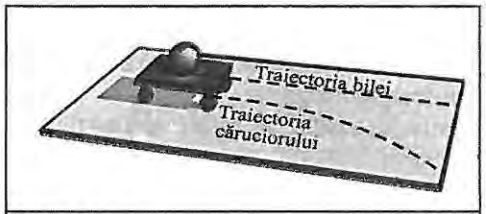


Fig. 2.35

Trăgând brusc de o foaie de hârtie pe care sunt aşezate câteva monezi, acestea rămân în locul unde au fost aşezate iniţial. De ce?
Verificaţi experimental.

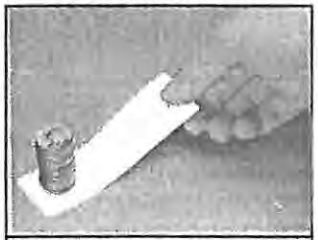


Fig. 2.36

Generalizând rezultatele mai multor observaţii experimentale s-a enunţat ***principiul I al mecanicii*** (principiul inerţiei):

Orice punct material îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atât timp cât asupra lui nu acţionează forţe exterioare care să-i schimbe această stare.

Observaţie:

➢ Principiul I al mecanicii nu poate fi verificat experimental în mod direct deoarece este practic imposibil să se realizeze un *sistem fizic izolat*, adică un corp sau un ansamblu de corpuri asupra căruia să nu se exercite nici o acţiune din exterior.

Sisteme de referinţă inerţiale

Un corp izolat care se mişcă rectiliniu uniform sau este în repaus faţă de stele, faţă de Pământ, se mişcă accelerat din cauza rotaţiei Pământului. Concluzia desprinsă de aici este evidentă: principiul inerţiei nu poate fi valabil în orice sistem de referinţă.

Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei se numesc sisteme de referinţă inerţiale (S.R.I.).

Sistemele de referinţă legate de stele sau chiar de Soare sunt sisteme de referinţă inerţiale cu un mare grad de precizie, fapt dovedit de experienţă.
Sistemele de referinţă legate de Pământ nu sunt riguros inerţiale din cauza rotaţiei Pământului faţă de stele. Pentru foarte multe situaţii practice Pământul poate fi considerat sistem de referinţă inerţial, cu un suficient grad de precizie.
Se demonstrează că:
Toate sistemele de referinţă inerţiale se mişcă unele faţă de altele rectiliniu uniform.

2.3. PRINCIPIUL AL II-LEA AL MECANICII

Din experienţa noastră ştim că:
- o minge de tenis poate fi oprită cu ajutorul unei rachete (fig. 2.37);
- o bilă din fier îşi schimbă direcţia de mişcare dacă apropiem de ea un magnet (fig. 2.38);

Fig. 2.37

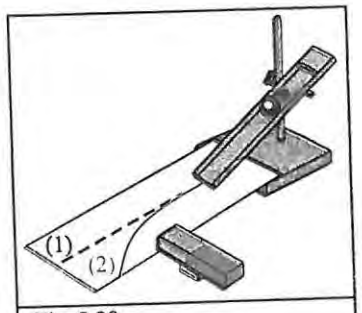


Fig. 2.38

- un corp lăsat liber cade, fiind atras de Pământ;
- un tren poate porni, opri sau poate să-şi schimbe direcţia de mişcare, când asupra sa acţionează locomotiva, frânele sau şinele căii ferate.

Acestea sunt câteva exemple care dovedesc că între corpuri se manifestă interacţiuni. De altfel, *interacţiunea este o proprietate generală a corpurilor.*
Măsura interacţiunii corpurilor este *forţa*. Orice schimbare a stării mecanice (mişcare, repaus) are drept cauză o forţă. Aceasta poate deforma un corp (*efect static*) sau poate modifica viteza unui corp, ceea ce determină apariţia unei accelerații (*efect dinamic*).

Experimental se poate pune în evidenţă că:
- Accelerația produsă de o forţă ce acţionează asupra unui corp are orientarea forţei şi modulul direct proporţional cu modulul forţei (fig. 2.39 a şi b).
- Aceeaşi forţă acţionând asupra unor corpuri cu mase diferite imprimă fiecărui corp o accelerație invers proporţională cu masa corpului (fig. 2.39 a şi c).

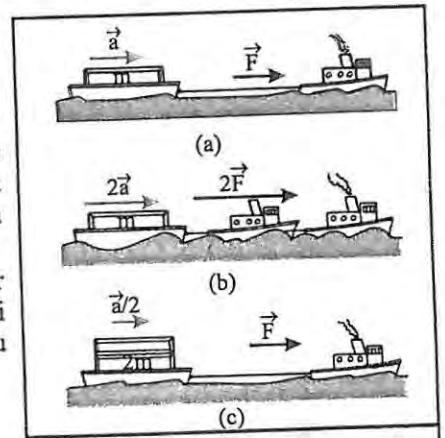


Fig. 2.39

Generalizând rezultatele experimentale s-a enunţat ***principiul al II-lea al mecanicii*** (principiul fundamental):

Accelerația imprimată de o forță unui punct material are direcția și sensul forței fiind direct proporțională cu modulul forței și invers proporțională cu masa lui.

$$\boxed{\vec{a} = k \cdot \frac{\vec{F}}{m}} \qquad (2.17)$$

Observații:

➢ Constanta k depinde de unitățile de măsură alese pentru accelerație, masă și forță. În cazul în care alegem unitățile de măsură: $[a]_{S.I.} = m/s^2$, $[m]_{S.I.} = kg$, $[F]_{S.I.} = N$ rezultă că în S.I. k = 1 și principiul al II-lea se scrie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \boxed{m \cdot \vec{a} = \vec{F}} \qquad (2.18)$$

➢ În practică, asupra unui corp acționează mai multe forțe. Principiul al II-lea se aplică și în acest caz:

Accelerația imprimată punctului material de masă m *este proporțională cu rezultanta forțelor care acționează asupra lui și are aceeași direcție și același sens cu ea.*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k; \qquad \vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_k}{m} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_k} \qquad (2.19)$$

➢ Principiul al II-lea ne permite să definim unitatea de măsură în S.I. pentru forță, numită *newton* (N).

$$[F]_{S.I.} = [m]_{S.I.} \cdot [a]_{S.I.} \Rightarrow 1\ N = 1\ kg \cdot 1\ m/s^2$$

Un newton este forța care acționând asupra unui punct material cu masa de un kilogram îi imprimă o accelerație de 1 m/s².

➢ Forța de atracție exercitată de Pământ asupra unui corp, *greutatea* corpului $\vec{G}$, este proporțională cu masa corpului: $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$.

Accelerația gravitațională ($\vec{g}$) este orientată spre centrul Pământului la fel ca și greutatea. Valoarea accelerației gravitaționale depinde de latitudine și de altitudine. La nivelul mării și la paralela 45° ea are valoarea $g \approx 9{,}8\ m/s^2$.

➢Ecuația $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ nu ne spune nimic despre *natura* forței: ea poate fi de natură gravitațională, electrică sau în particular forță elastică, forță de frecare etc. (sau chiar o sumă vectorială de astfel de forțe). Forța apare sub formă abstractă, ca un *model mecanic* al oricărei interacțiuni a corpurilor, independent de natura fizică a

acestei interacțiuni. Astfel, relația $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, pe lângă caracterul de lege a naturii, are și caracter de *definiție dinamică a forței*. De aceea pentru determinarea mișcării unui sistem: oscilator elastic, sistem solar, atom etc., trebuie cunoscută și *legea forței* (de exemplu, legea deformării elastice, legea atracției gravitaționale, legea interacțiunii electrice etc.).

Probleme rezolvate

1

Asupra unui punct material de masă m acționează o forță $F_1 = 20$ N *care îi imprimă o accelerație* $a_1 = 1\ m/s^2$. *Cu ce accelerație se va mișca corpul sub acțiunea unei forțe* $F_2 = 40$ N *?*

Rezolvare:

$F_1 = 20$ N
$a_1 = 1\ m/s^2$
$F_2 = 40$ N
$a_2 = ?$

Aplicând principiul II:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot a_1 = F_1 \\ m \cdot a_2 = F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow a_2 = 2\ m/s^2$$

2

Un punct material cu masa $m_1 = 10$ kg *capătă o accelerație* $a_1 = 2\ m/s^2$ *când asupra lui acționează o forță* $\vec{F}$. *Ce accelerație va imprima aceeași forță unui corp cu masa de* 5 kg*?*

Rezolvare:

$m_1 = 10$ kg
$a_1 = 2\ m/s^2$
$m_2 = 5$ kg
$a_2 = ?$

Aplicând principiul II pentru fiecare corp:

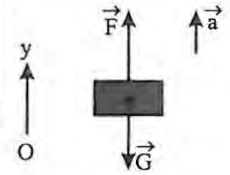
$$\left.\begin{array}{l} m_1 \cdot a_1 = F \\ m_2 \cdot a_2 = F \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow a_2 = 4\ m/s^2$$

3

Un corp cu masa de 100 kg *este ridicat cu o macara, care exercită o forță de* 100 N. *Cât este accelerația corpului (se neglijează forțele de frecare,* $g \approx 10\ m/s^2$*)?*

Rezolvare:

$m = 100$ kg
$g \approx 10\ m/s^2$
$F = 1100$ N
$a = ?$



• aplicăm principiul al II-lea:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{G}$$

• alegând sensul pozitiv al axei Oy în sensul mișcării:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot a = F - G \\ m \cdot g = G \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{F - m \cdot g}{m} \Rightarrow a = 1\ m/s^2$$

2.4 PRINCIPIUL AL III-LEA AL MECANICII

O carte este aşezată pe masă (fig. 2.40). De ce nu cade cartea?
Din neatenţie Mircea "loveşte" un stâlp. Deşi acţionează asupra stâlpului, el "simte" efectul interacţiunii. De ce?
Un înotător sare dintr-o barcă (fig. 2.42). De ce barca se deplasează în sens opus sensului în care a sărit înotătorul?

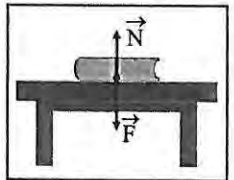


Fig. 2.40

Fig. 2.41

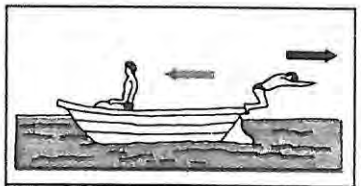


Fig. 2.42

Reprezentaţi forţele cu care acţionează corpurile din figura 2.42 unul asupra celuilalt.

Exemplele de mai sus evidenţiază, în cazul interacţiunii dintre două corpuri, apariţia, simultană a două forţe pereche. Cele două forţe au aceeaşi direcţie şi sensuri opuse. Valoarea forţelor poate fi determinată experimental.

Aşezaţi doi magneţi, fiecare pe un cărucior şi prindeţi-i, prin intermediul unui dinamometru de suporţi ficşi (fig. 2.43). Modificaţi distanţa dintre cărucioare şi notaţi, de fiecare dată, indicaţia dinamometrelor.

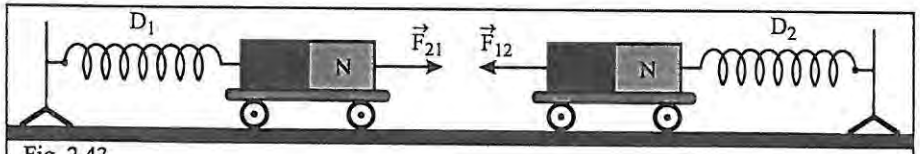


Fig. 2.43

Găsiţi printr-un experiment sugerat în figura 2.44 valoarea forţelor cu care acţionează cele două dinamometre D_1, respectiv D_2 unul asupra celuilalt.

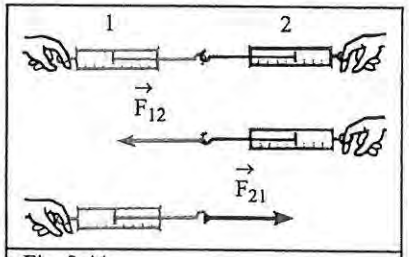


Fig. 2.44

În fiecare caz, forţele de atracţie reciprocă, indicate de dinamometre sunt egale în modul şi de sensuri opuse: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Generalizând rezultatele mai multor observaţii experimentale s-a enunţat ***principiul al III-lea al mecanicii*** (principiul acţiunii şi reacţiunii):

Dacă un corp (A) acţionează asupra altui corp (B) cu o forţă numită acţiune ($\vec{F}_{AB}$), cel de-al doilea corp acţionează asupra primului corp cu o forţă ($\vec{F}_{BA}$) egală în modul, având aceeaşi direcţie şi opusă, ca sens, numită reacţiune.

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}} \qquad (2.20)$$

Observaţie:

➢ Cele două forţe, acţiunea şi reacţiunea, au *punctele de aplicaţie pe corpuri diferite* şi acţionează pe aceeaşi direcţie în sensuri opuse.

Exemple de interacţiuni:

• Greutatea unui corp este *acţiunea* exercitată de Pământ asupra corpului. *Reacţiunea* ei este o forţă care are punctul de aplicaţie în centrul Pământului. Masa Pământului fiind mult mai mare decât masa corpului, această forţă nu produce un efect sesizabil asupra Pământului (fig. 2.45).

Fig. 2.45

• La contactul oricăror două corpuri apar forţe perpendiculare pe suprafaţa de contact, numite forţe de apăsare normală (*normala*, $\vec{N}$):

Un corp aşezat pe un resort, datorită greutăţii sale $\vec{G}$, comprimă resortul cu forţa $\vec{N}'$ (acţiune); resortul deformat acţionează asupra corpului cu o forţă elastică $\vec{N}$ (reacţiune) (fig. 2.46).

În cazul corpului aşezat pe masă $\vec{N}$ şi $\vec{N}'$ sunt forţe de apăsare normală de tip acţiune şi reacţiune (fig. 2.47).

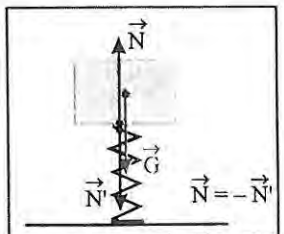


Fig. 2.46

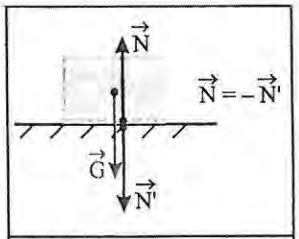
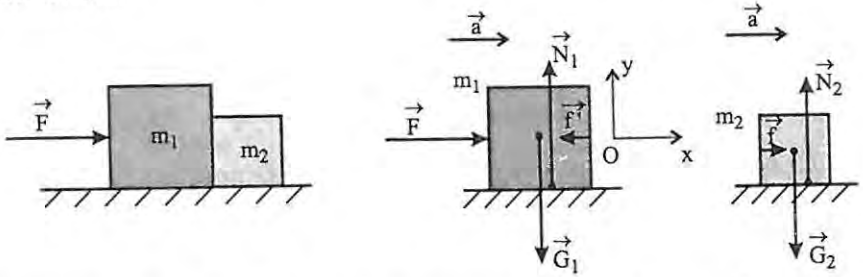


Fig. 2.47

Problemă rezolvată

Două corpuri paralelipipedice de mase $m_1 = 6$ kg *şi* $m_2 = 3$ kg *sunt aşezate alăturat pe o masă orizontală netedă fără frecare. Corpul de masă* m_1 *este împins cu o forţă orizontală* $F = 18$ N. *Cu ce forţă corpul* m_1 *împinge corpul* m_2*?*

Rezolvare:



La contactul între corpurile m_1 şi m_2 apare o pereche de forţe, de tip acţiune şi reacţiune $\vec{f}$ şi $\vec{f}'$:

$$\vec{f} = -\vec{f}' \ (f = f')$$

Aplicăm principiul al II-lea pentru fiecare corp:

$$m_1 \cdot \vec{a} = \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_1 + \vec{f}'; \qquad m_2 \cdot \vec{a} = \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{f}$$

Proiecţiile pe axe ale mărimilor fizice vectoriale care intervin sunt:

$$Ox: \begin{cases} m_1 a = F - f \\ m_2 a = f \end{cases} \qquad Oy: \begin{cases} 0 = N_1 - G_1 \Rightarrow N_1 = G_1 = m_1 g \\ 0 = N_2 - G_2 \Rightarrow N_2 = G_2 = m_2 g \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2) \cdot a = F$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{m_2 \cdot F}{m_1 + m_2}$$

numeric: $f = 6$ N

PROBLEME

1

Firul cu plumb îşi păstrează direcţia verticală dacă este suspendat într-un vagon care se mişcă rectiliniu uniform? Dar dacă vagonul are o mişcare rectiliniu uniform accelerată?

2

Presupunând că păsările ar putea trăi fără aer, ar putea ele zbura într-un spaţiu fără aer? Justificaţi răspunsul.

3

Din care barcă este mai uşor de sărit pe mal: dintr-una mai grea sau dintr-una mai uşoară, atunci când nu sunt legate de mal? De ce?

4

După ieşirea obuzului din ţeava orizontală a unui tun traiectoria sa se curbează spre Pământ. De ce?

5

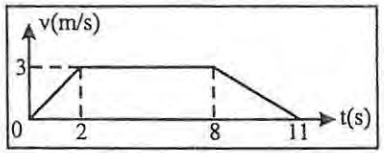
Un om cu masa $m = 60$ kg se află într-un lift care urcă cu accelerația $a = 2$ m/s^2. Considerând $g = 10$ m/s^2 să se afle greutatea omului şi forţa cu care el apasă asupra podelei liftului.

6

Un fotbalist loveşte o minge de masă m, aflată iniţial în repaus şi îi imprimă viteza v. Considerând că mingea a fost în contact cu piciorul un timp Δt şi că asupra ei nu acţionează alte forţe orizontale, să se afle forţa medie cu care fotbalistul a acţionat asupra mingii.

7 F

Un ascensor are (împreună cu persoanele transportate) masa m = 400kg. Viteza ascensorului variază în timp ca în graficul de mai jos. Să se afle valoarea forţei exercitate de electromotor asupra ascensorului în cele trei etape ale mişcării. Se consideră $g = 10$ m/s^2.



8

O picătură de ploaie cade vertical şi întâmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă direct proporţională cu pătratul vitezei. Când picătura are viteza $v_1 = 15$ m/s, accelerația ei este $a_1 = 7{,}5$ m/s^2. Considerând că în apropierea solului viteza picăturii a devenit constantă v_0, să se afle valoarea acesteia ($g = 10$ m/s^2).

9

Pe două beţe subţiri, paralele, situate la distanţa d unul faţă de altul, care formează un plan orizontal, se află o sferă de diametru 2R > d. Cu ce accelerație minimă orizontală, perpendiculară pe beţe, trebuie trase acestea, astfel încât sfera să nu mai apese pe unul dintre ele?

10

Într-o sală de sport este suspendată de tavan o bară de masă M. O pisică de masă m sare şi se agaţă de bară. Firul ce susţine bara se rupe şi atunci pisica se caţără pe bară, astfel încât rămâne la o înălţime constantă, faţă de sol. Cu ce accelerație cade bara?

TEST

I

Unitatea de măsură a accelerației în S.I. este echivalentă cu:
a) N/kg; b) m/s; c) $m \cdot s^2$; d) $N \cdot kg$. 0,5p

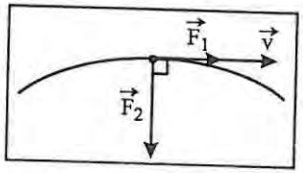
II

Completați enunțurile următoare astfel încât să fie corecte și complete:
a) Sistemele de referință inerțiale se mișcă unele față de altele.... 0,5p
b)... unui corp este forța cu care acesta este atras de Pământ. 0,5p
c) O forță imprimă unui corp cu masa de 0,6 kg o accelerație de 2 m/s^2. Aceeași forță imprimă unui corp cu masa de 400 g accelerația.... 0,5p

III

Care din afirmațiile următoare se referă la proprietatea de *inerție*:
a) Dintr-un pom cade un fruct.
b) O mașină a derapat pe șoseaua alunecoasă.
c) Luna se rotește în jurul Pământului.
d) Atletul nu se oprește exact pe linia de sosire.
e) Un fluture zboară. 1,5p

IV

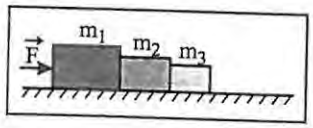


Asupra unui punct material cu masa m = 5 kg acționează la un moment t forțele reprezentate în figură, de module $F_1 = 6$ N și $F_2 = 8$ N. Reprezentați vectorul accelerație, calculați modulul său și precizați dacă imediat după momentul t modulul vitezei va crește, va scădea sau va rămâne constant. 2p

V

Un om se află într-un lift care urcă rectiliniu uniform. Reacțiunea greutății omului (conform principiului al III-lea al mecanicii) este o forță exercitată de:
a) podea asupra omului; b) om asupra podelei; c) om asupra Pământului. 1p

VI



Corpurile reprezentate în figură au masele: $m_1 = 6$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 2$ kg și pot aluneca fără frecări pe suprafața mesei orizontale. Dacă forța care împinge corpul m_1 are valoarea F = 24 N, să se afle valoarea accelerației corpurilor și forța cu care corpul m_2 împinge corpul m_3. 2,5p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute

2.5 LEGEA LUI HOOKE. TENSIUNEA ÎN FIRE

2.5.1 DEFORMAREA ELASTICĂ

Dacă asupra unui corp acționează două sau mai multe forțe, efectul poate fi deformarea corpului (*efect static*).
Când corpul revine la forma și dimensiunile inițiale după încetarea acțiunii forțelor, deformarea se numește *elastică*, iar corpul se numește *elastic*.
Corpuri precum cele din plumb sau plastilină, dacă au fost deformate nu mai revin la forma inițială după încetarea acțiunii forțelor; deformarea acestora o numim *plastică*. Un resort de oțel se deformează *elastic* sub acțiunea unor forțe deformatoare; dacă acestea depășesc anumite limite, resortul nu revine exact la dimensiunile inițiale; spunem că a rămas cu o *deformare remanentă*.

Un corp nu se poate deforma sub acțiunea unei singure forțe. De exemplu, dacă așezăm un fir din cauciuc cu masa neglijabilă pe o suprafață orizontală, fără frecări și tragem de un capăt al firului cu o forță orizontală $\vec{F}$, acesta se va mișca accelerat, dar nu se va deforma.
Dacă un capăt al firului (A) este legat de un suport fix și tragem de celălalt capăt (B) cu forța $\vec{F}$, atunci firul se va deforma (alungi). Asupra firului (aflat în repaus față de suportul fix) acționează pe lângă forța $\vec{F}$ și forța de reacțiune a suportului $\vec{F}'$ (fig. 2.48).

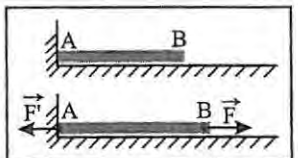


Fig. 2.48

$$\vec{F} = -\vec{F}'; \quad F = F'$$

În mod obișnuit, pentru a simplifica exprimarea, ne vom referi la deformarea corpului sub acțiunea forței de tracțiune (deformatoare) $\vec{F}$, deși asupra corpului mai acționează cel puțin o altă forță.

2.5.2 LEGEA LUI HOOKE

Legea lui Hooke stabilește legătura între deformare (efect) și forța deformatoare (cauză) în cazul deformărilor elastice.

Lucrați în grup.

Un fir cilindric vertical (din cauciuc) cu lungimea inițială ℓ_0 și aria secțiuni S_0 este suspendat vertical la un capăt (fig. 2.49).
Suspendați de capătul inferior discuri identice cu masa cunoscută și măsurați lungimea firului (ℓ). Diferența $\ell - \ell_0 = \Delta\ell$ se numește *alungire absolută*.

Dublați, apoi triplați numărul de discuri și măsurați de fiecare dată lungimea firului.

Alungirea este proporțională cu forța deformatoare:

$$\Delta\ell \sim F$$

Repetați experimentul folosind un fir din același material având aceeași secțiune, dar lungimea inițială $2\ell_0$. Suspendând, pe rând, unul, două, trei discuri măsurați, în fiecare caz alungirea $\Delta\ell$.

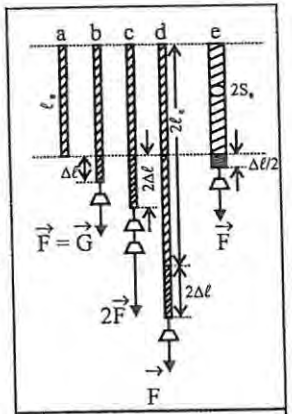


Fig. 2.49

Alungirea este proporțională cu lungimea inițială:

$$\Delta\ell \sim \ell_0$$

Repetați experimentul folosind un fir cu lungimea ℓ_0, din același material dar cu aria secțiunii $2S_0$.

Alungirea este invers proporțională cu aria secțiunii transversale a materialului:

$$\Delta\ell \sim \frac{1}{S_0}$$

Concluzia:

$$\Delta\ell \sim \frac{F \cdot \ell_0}{S_0}$$

Utilizând fire din materiale diferite cu aceleași caracteristici (ℓ_0, S_0), dacă forța deformatoare rămâne neschimbată, veți observa că alungirile sunt diferite.

Alungirea depinde și de natura materialului supus solicitării.

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot \ell_0}{S_0} \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}} \qquad (2.21)$$

unde E este o constantă de material numită și *modulul lui Young* sau *modulul de elasticitate la tracțiune.* $[E]_{S.I.} = N/m^2$

Raportul $F/S_0 = \sigma$ reprezintă forța exercitată pe unitatea de suprafață și se numește tensiune elastică sau *efort unitar.* $[\sigma]_{S.I.} = N/m^2$

Raportul $\Delta\ell/\ell_0 = \varepsilon$ reprezintă *alungirea relativă* (raportul dintre alungirea absolută și lungimea inițială). Alungirea relativă este o mărime adimensională și uneori se exprimă în procente.

Pentru un material dat, **legea lui Hooke** sau **legea deformării elastice** se enunță: Alungirea relativă este proporțională cu efortul unitar.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma} \qquad (2.22)$$

Observație:

➢ Legea lui Hooke este o lege empirică, obținută experimental, valabilă până la anumite valori ale efortului unitar, valori caracteristice materialului solicitat; din această cauză legea lui Hooke este numită și *lege de material.*

Dependența efortului unitar de alungirea relativă (extindere)

În figura 2.50 este reprezentat grafic efortul unitar σ în funcție de alungirea relativă ε.

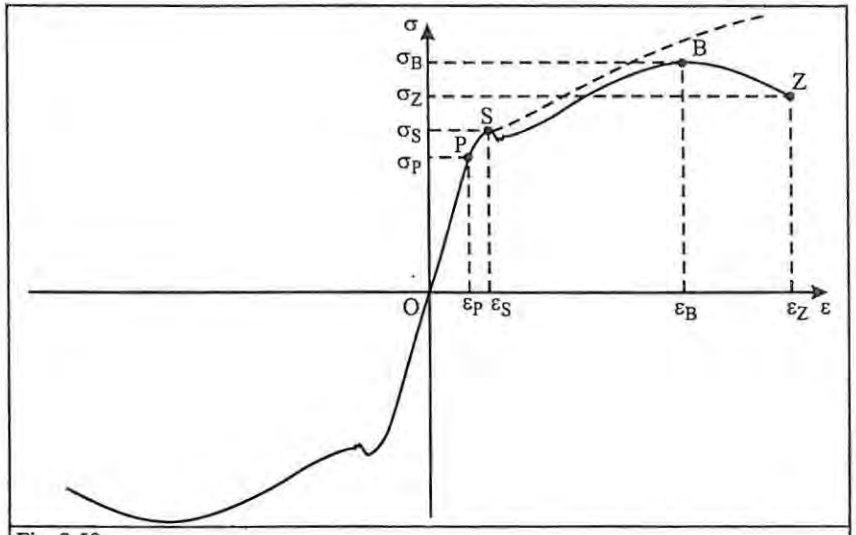


Fig. 2.50

O curbă asemănătoare cu aceasta se obține dacă am reprezenta forța $F = \sigma S_0$ în funcție de alungirea barei $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = \varepsilon\ell_0$.

Analizând graficul observăm că:

- Porțiunea OP este rectilinie deci de proporționalitate între σ și ε: este *domeniul de valabilitate al legii lui Hooke.*
- Punctul $P(\varepsilon_P, \sigma_P)$ reprezintă *limita de proporționalitate* – limita domeniului Hooke. Deformațiile elastice se întind însă ceva mai departe de limita de proporționalitate, până la *limita de elasticitate* (porțiunea PS), după care începe domeniul *deformațiilor plastice.*
- Punctul critic $S(\varepsilon_S, \sigma_S)$ reprezintă *limita de curgere.* Dincolo de această limită deformațiile cresc *neregulat* fără vreo solicitare suplimentară; materialul "curge"; este regiunea de prelucrare plastică a materialelor (de exemplu, laminarea).
- După terminarea zonei de curgere, tensiunea crește din nou odată cu deformarea, până la *limita de rezistență* $B(\varepsilon_B, \sigma_B)$ când începe o gâtuire pronunțată a barei într-un anumit loc (se observă apariția unor striații și suprafața devină mată) și bara se rupe, corespunzător punctului de rupere $Z(\varepsilon_Z, \sigma_Z)$.

În relația $\frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$, notăm: $\frac{E \cdot S_0}{\ell_0} = k$

unde: E, S_0, ℓ_0 sunt constante specifice unui fir (corp),

rezultă: $$\boxed{F = k \cdot \Delta\ell} \qquad (2.23)$$

k se numeşte *constantă elastică* a firului (corpului).

Unitatea de măsură a constantei elastice în S.I. este: $[k]_{S.I.} = N/m$

Relația $k \cdot \Delta\ell = F$ exprimă *dependența alungirii absolute de forța deformatoare.*

Tabelul 2.2

Materialul	Modulul lui Young, E	Materialul	Modulul lui Young, E
	$\cdot 10^{11}\ N \cdot m^{-2}$		$\cdot 10^{11}\ N \cdot m^{-2}$
Aluminiu	0,70	Plumb	0,16
Alamă	0,91	Fier	1,9
Cupru	1,1	Oțel	2,0
Sticlă	0,55	Tungsten	3,6

Determinarea constantei elastice a unui resort

Lucrați în grup.

Alegeți din trusa de experiențe de mecanică un dinamometru etalonat pentru măsurarea forțelor până la 1 N şi fixați pe marginea lui hârtie milimetrică (fig. 2.51 a).

Fixați dinamometrul pe un suport ca în figura 2.51 b şi de cârligul său suspendați diferite discuri crestate, cu masele cunoscute. Notați în fiecare caz, alungirea resortului.

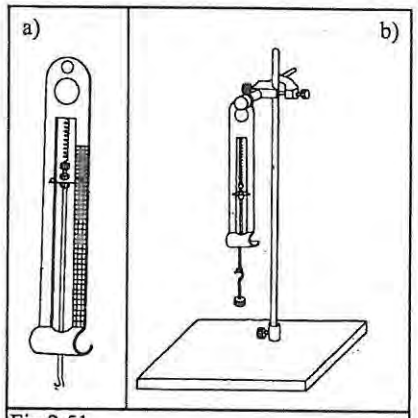


Fig.2.51

Fiecare determinare permite calculul factorului k din relația $F = k \cdot \Delta\ell$, unde:

$$F = G = m \cdot g$$

Înlocuiți dinamometrul de 1 N cu unul de 2,5 N şi repetați determinările. Rezultatele determinărilor le treceți într-un tabel de forma:

Nr. determ.	Dinamometrul de 1 N						Dinamometrul de 2,5 N					
	$F = G$ (N)	ℓ_0 (m)	ℓ (m)	$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ (m)	$k = G/\Delta\ell$ (N/m)	k_m (N/m)	$F = G$ (N)	ℓ_0 (m)	ℓ (m)	$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ (m)	$k = G/\Delta\ell$ (N/m)	k_m (N/m)
1												
2												
. . .												

unde k_m este valoarea medie a constantei k.

Comparați valorile obținute pentru fiecare determinare şi calculați în fiecare caz eroarea determinării. Indicați sursele erorilor.

Reprezentați grafic $\Delta\ell$ (m) în funcție de F (forța deformatoare) şi comparați forma graficului obținut cu cel din figura 2.51.

Constanta elastică se poate determina şi din grafic obținând o valoare apropiată de valoarea sa medie determinată prin calcul. Se aleg două puncte pe dreapta reprezentativă A şi B. În triunghiul dreptunghic ABC, cateta BC reprezintă $F_B - F_A$, iar cateta AC este $\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$.

$$k = \frac{F}{\Delta\ell} = \frac{F_A}{\Delta\ell_2} = \frac{F_B}{\Delta\ell_1} = \frac{F_B - F_A}{\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1} = \text{tg}\,\alpha$$

$$k = \text{tg}\,\alpha$$

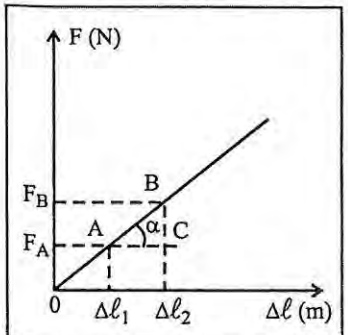


Fig. 2.51

2.5.3 FORȚA ELASTICĂ

Dacă un resort a fost deformat, după încetarea acțiunii forței deformatoare el revine la forma şi lungimea inițială. Înseamnă că între părțile sale componente (între spire sau grupuri de spire) se exercită forțe care tind să aducă resortul la starea inițială. În cazul resortului alungit aceste forțe tind să micşoreze distanțele dintre spire, iar în cazul celui comprimat să le mărească.

Alungirea unui resort sau fir elastic poate fi considerată o mărime fizică vectorială fiind coliniară cu forța de deformare şi având sensul ei:

$$\vec{F} = k\Delta\vec{\ell} \Rightarrow \Delta\vec{\ell} = \frac{1}{k}\vec{F}$$

Forța care tinde să readucă un corp deformat elastic în starea inițială (de corp nedeformat) o numim *forță elastică* $\vec{F}_e$.

Forța elastică este direct proporțională cu alungirea (comprimarea) corpului și opusă ei.

Expresia matematică a forței elastice este: $\boxed{\vec{F}_e = -k\Delta\vec{\ell}}$ (2.24)

Modulul forței elastice este: $|\vec{F}_e| = F_e = k\Delta\ell$

Ca să înțelegem mai bine semnificația acestei forțe vom analiza sistemul fizic reprezentat în figura 2.52.

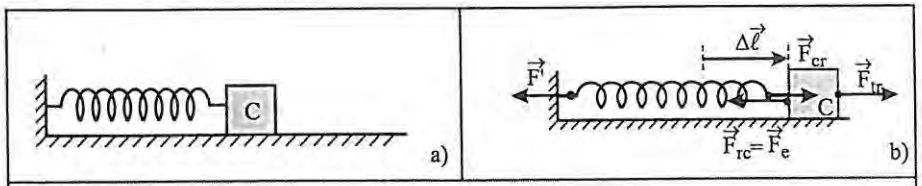


Fig. 2.52

În figura 2.52 a) resortul este nedeformat fiind legat de peretele fix în stânga și de corpul C în dreapta. Tragem de corp cu forța $\vec{F}_{tr}$ spre dreapta (fig.2.52 b); corpul, la rândul lui, acționează asupra resortului către dreapta cu forța $\vec{F}_{cr}$ care produce împreună cu $\vec{F}'$ (forța exercitată de perete) alungirea resortului spre dreapta ($\Delta\vec{\ell}$).

Presupunem că în situația din figura 2.52 b) corpul C și resortul sunt în stare de repaus. În acest moment resortul acționează asupra corpului cu forța elastică $\vec{F}_{rc} = \vec{F}_e = -\vec{F}_{tr}$; resortul este în stare de repaus sub acțiunea forțelor $\vec{F}'$ și $\vec{F}_{cr}$. În această situație forțele $\vec{F}_{cr}$ și $\vec{F}_{rc} = \vec{F}_e$ constituie o pereche acțiune-reacțiune și respectă principiul al III-lea al mecanicii. Dacă încetează brusc acțiunea fortei $\vec{F}_{tr}$ corpul C rămâne numai sub acțiunea forței orizontale $\vec{F}_e$ (de fapt mai există forțele verticale $\vec{G}$ și $\vec{N}$ pe care nu le-am reprezentat, nefiind importante în acest caz) care trage corpul spre stânga (în condițiile unor frecări neglijabile). Deci forța $\vec{F}_e$, deplasând corpul spre stânga, face ca resortul să revină la lungimea inițială.

Dacă am considera resortul deformat în stare de repaus (fig. 2.52 b) format din trei părți, forțele ce acționează asupra acestora s-ar reprezenta ca în figura 2.53.

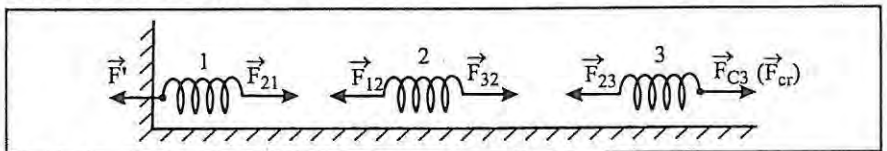


Fig. 2.53

Forțele $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{32}$ și $\vec{F}_{23}$ sunt forțe interne (elastice) exercitate între părți ale resortului, fiecare având modulul $k\Delta\ell$ (unde $\Delta\ell$ este alungirea *întregului* resort).

2.5.4 TENSIUNEA ÎN FIR

În practică sunt situații când două sau mai multe corpuri interacționează prin intermediul firelor cu care sunt legate.

Exemple:

- O sanie este trasă de un copil prin intermediul unei sfori.
- Un ascensor este ridicat de electromotor prin intermediul unor cabluri.
- Macaraua deplasează corpuri care sunt legate cu cabluri.

Forțele de interacțiune ce se exercită asupra corpurilor prin intermediul firelor le numim *forțe de tensiune* ($\vec{T}$).

Două corpuri de mase m_1 și m_2 legate printr-un fir inextensibil, cu masa neglijabilă, sunt așezate pe o platformă orizontală, fără frecări.

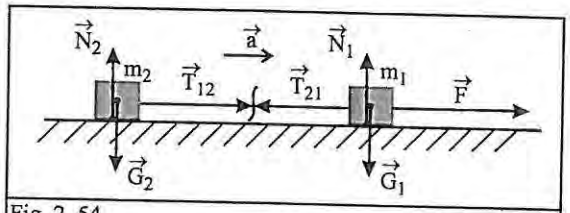


Fig. 2. 54

Asupra corpului m_1 acționează:

- forța de tracțiune $\vec{F}$ (exercitată, de exemplu, de mâna unui om);
- greutatea $\vec{G}_1$ (datorată interacțiunii cu Pământul);
- normala $\vec{N}_1$ (exercitată de platforma pe care alunecă corpul).

Asupra corpului m_2 acționează forțele $\vec{G}_2$ și $\vec{N}_2$.

Dacă ambele corpuri au fost inițial în repaus, acționând cu forța $\vec{F}$ asupra corpului m_1, acesta va căpăta o accelerație $\vec{a}$ spre dreapta și odată cu el se va deplasa și corpul m_2 spre dreapta, cu aceeași accelerație $\vec{a}$ (deoarece firul este inextensibil). Ce forță trage corpul m_2 orizontal spre dreapta ?

Cum singurul corp din sistem, ce poate acționa orizontal asupra lui m_2, este m_1, înseamnă că forța care îl determină pe m_2 să se miște (accelerat) spre dreapta este rezultatul acțiunii lui m_1 asupra lui m_2; este firesc să notăm această forță cu $\vec{T}_{12}$.

Conform principiului al III-lea și m_2 acționează asupra lui m_1 cu o forță $\vec{T}_{21}$ egală în modul, dar de sens opus:

$$\vec{T}_{21} = -\vec{T}_{12}\ ;\ T_{21} = T_{12} = T$$

Cele două forțe, cu care corpurile legate la capetele firului (m_1 și m_2) interacționează, sunt *tensiuni* în același fir. Astfel de forțe pot lua naștere și în bare (de exemplu: în bara cu care un tractor trage o remorcă).

În fire forțele de tensiune au tendința de a mări lungimea acestora.

Observație:

➢ În bare (tije) forțele de tensiune pot avea și tendința inversă, adică de comprimare a acestora.

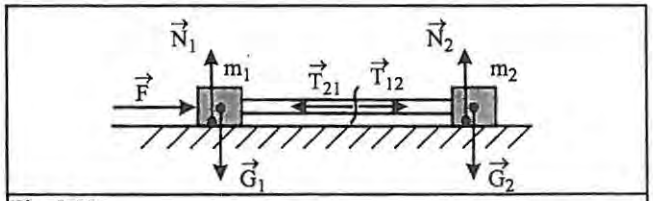


Fig. 2.55

Când împingem corpul m_1 cu forța $\vec{F}$ (fig. 2.55), acesta împinge corpul m_2 cu forța (de tensiune) $\vec{T}_{12}$, iar corpul m_2 îl împinge (în sens opus) pe m_1 cu forța (de tensiune) $\vec{T}_{21}$:

$$\vec{T}_{21} = -\vec{T}_{12}$$

$$T_{21} = T_{12} = T$$

În cazul în care firul este elastic și deformarea este observabilă (putând fi măsurată), forțele de tensiune $\vec{T}_{12}$ și $\vec{T}_{21}$ sunt de fapt forțe elastice și se poate scrie:

$$T_{12} = T_{21} = T = k\Delta\ell$$

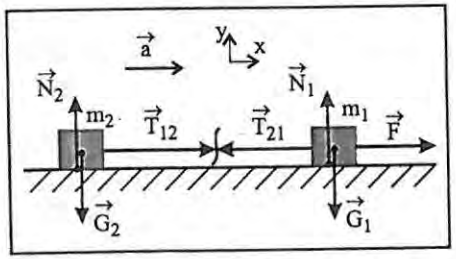
unde k este constanta elastică ($k = ES_0/\ell_0$) a firului, iar $\Delta\ell$ este alungirea firului ca urmare a interacțiunii dintre corpurile de la capetele firului.

În concluzie, corpurile legate prin fire sau bare *interacționează* prin forțe orientate în lungul firului (barei), care conform principiului al III-lea al mecanicii, sunt egale în modul și de sens opus.

Problemă rezolvată

Sistemul reprezentat în figură este alcătuit din două corpuri cu masele $m_1 = 3$ kg *și* $m_2 = 2$ kg, *legate printr-un fir cu constanta elastică* k = 100 N/m. *Se acționează asupra primului corp cu o forță* F = 10N. *Dacă în timpul mișcării corpurilor, fără frecare, alungirea firului este constantă să se afle valoarea acesteia.*

Rezolvare:



Aplicăm principiul fundamental al mecanicii în forma vectorială și apoi proiectăm mărimile vectoriale care intervin pe axa Ox indicată în figură, ținând cont și de principiul al III-lea:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}_{21} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 \\ m_2\vec{a} = \vec{T}_{12} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 \end{cases} \qquad Ox \begin{cases} m_1 a = F - T_{21} \\ m_2 a = T_{12} \end{cases}$$

Deoarece: $T_{21} = T_{12} = T$, rezultă: $\begin{cases} m_1 a = F - T \\ m_2 a = T \end{cases}$

$$(m_1 + m_2)a = F \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$T = m_2 a = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

Dar: $T = F_e = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{T}{k} = \frac{m_2 F}{k(m_1 + m_2)}$

numeric: $\Delta\ell = 0{,}04$ m = 4 cm

PROBLEME

1

O coardă de nailon având lungimea de 50 m (folosită de alpiniști), se alungește cu 1,5 m sub acțiunea greutății unui om cu masa de 80 kg. Determinați modulul lui Young pentru nailon, știind că diametrul corzii este de 9 mm.

2

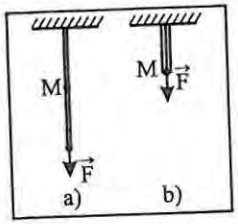
Un cablu de ascensor, pentru a funcționa în siguranță, trebuie să fie supus unui efort unitar maxim de $7 \cdot 10^7 N/m^2$. Dacă el susține un ascensor încărcat cu greutatea totală de 18 000 N, care are o accelerație maximă în sus de $1,5\ m/s^2$, care trebuie să fie diametrul cablului?

3

Un fir elastic așezat pe o suprafață orizontală fără frecare are lungimea ℓ_0, modulul de elasticitate E și densitatea ρ. Ce lungime va avea firul când este suspendat de un capăt în poziție verticală?

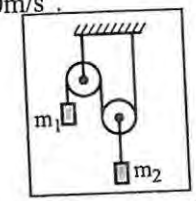
4

Un fir elastic se alungește cu $\Delta\ell$ când se trage de el cu forța $\vec{F}$ (fig. a). Ce alungire va avea firul atunci când capetele lui sunt fixate și se trage cu aceeași forță de mijlocul său M (fig. b)?



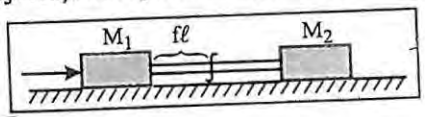
5

În sistemul reprezentat în figura de mai jos scripeții sunt ideali, firele sunt inextensibile și cu masa neglijabilă, iar corpurile au masele $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 3$ kg. Aflați accelerațiile corpurilor considerând $g = 10 m/s^2$.



6

Corpurile reprezentate în figură se pot mișca pe suprafața orizontală, fără frecare. Între ele se află o tijă rigidă de masă m. Se cunosc masele corpurilor M_1, M_2, m și forța de împingere orizontală $\vec{F}$ aplicată corpului de masă M_1. Să se afle tensiunea din tijă într-o secțiune aflată la o fracțiune f din lungimea ℓ a tijei față de capătul dinspre corpul M_1.

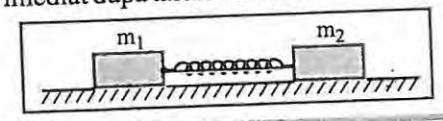


7

Corpurile de masă $m_1 = 1$kg și $m_2 = 2$ kg, reprezentate în figură, sunt legate între ele printr-un resort, de constantă elastică $k = 100$ N/m, comprimat cu $\Delta\ell = 4$ cm și un fir ideal. Corpurile sunt în repaus, pe o suprafață orizontală, fără frecare. Aflați:

a) tensiunea în fir;

b) accelerația unui corp față de celălalt, imediat după tăierea firului.



2.6 LEGILE FRECĂRII LA ALUNECARE

2.6.1 FORȚA DE FRECARE LA ALUNECARE

Un corp lansat cu viteză inițială $\vec{v}$ de-a lungul unui plan orizontal are o mișcare încetinită și până la urmă se va opri. Care este forța sub acțiunea căreia corpul se oprește?

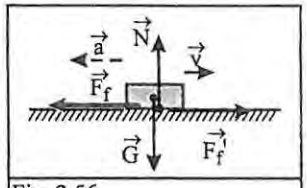


Fig. 2.56

Ori de câte ori suprafața unui corp alunecă pe suprafața altui corp, fiecare exercită asupra celuilalt o forță (conform principiului al III-lea al mecanicii) paralelă cu suprafața de contact numită *forță de frecare* $\vec{F}_f$, care se opune mișcării unui corp față de celălalt (fig. 2.56).

Forța de frecare se datorează întrepătrunderii asperităților și neregularităților microscopice a celor două suprafețe care alunecă una față de cealaltă. Prin urmare, mișcarea orizontală încetinită, până la oprire, se datorează forței de frecare, exercitată de plan asupra corpului. *Forța de frecare este conținută în planul alunecării* și are *sens opus* vitezei corpului față de plan (fig. 2.56). În planul de contact există două forțe de frecare, acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sens opus, una acționează asupra corpului și cealaltă asupra planului.

Forțele de frecare frânează totdeauna mișcarea relativă a corpurilor care alunecă.

Pentru a menține corpul în mișcare uniformă de alunecare pe o suprafață fixă trebuie să acționăm cu o forță de tracțiune (de împingere) egală în modul și de sens opus cu forța de frecare.

Observații:

➢ Pentru a deplasa un corp pe o suprafață (exemplu: un dulap pe podea), trebuie împins corpul cu o forță pentru a-l *urni* din loc, necesară pentru a învinge *forța de frecare statică*. După ce a fost pornit corpul forța necesară menținerii în mișcare de alunecare pe podea devine mai mică.

Frecarea dintre două corpuri solide în repaus unul față de altul se numește frecare statică.

➢ Când corpurile se deplasează unul față de celălalt, forțele de frecare se numesc *cinetice*. Dacă mișcarea este de alunecare, forțele se *numesc forțe de frecare la alunecare* (fig. 2.57 a), iar dacă mișcarea este o rostogolire a unuia dintre corpuri pe suprafața celuilalt, *frecarea* este *de rostogolire* (fig. 2.57 b).

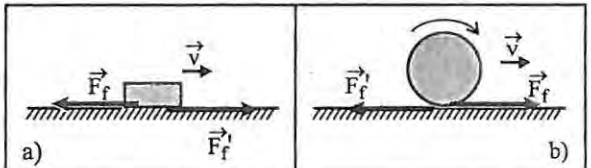


Fig. 2.57

➢ Dacă frecările sunt considerabil mai mici decât celelalte forțe care determină mișcarea sistemului atunci le putem neglija. Această situație este o situație limită, idealizată.

➢ Forțe de frecare apar și la alunecarea unui corp solid într-un fluid (apă, aer). *Frecarea fluidă* variază cu viteza de deplasare și mărimea suprafeței de contact cu fluidul. Reducerea frecării fluide se ia în considerație în conceperea formei avioanelor, automobilelor, vapoarelor etc.

2.6.2 LEGILE FRECĂRII LA ALUNECARE

Legile frecării au fost descoperite pe cale experimentală de savantul Leonardo Da Vinci (1452-1519) și redescoperite de G. Amontons (1699) și Charles A. Coulomb (1736-1806).

Folosind un dispozitiv asemănător celui din figura 2.58 *(tribometru)* puteți studia factorii de care depinde valoarea forței de frecare la alunecare.

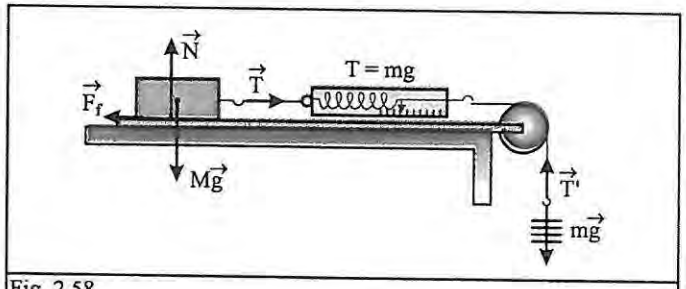


Fig. 2.58

Inițial, corpul paralelipipedic (care are la unul din capete un cârlig de care se prinde un fir subțire inextensibil ce se trece peste un scripete fix) se află în repaus. La capătul firului se prinde un taler pe care se pun mase marcate până când sistemul începe să se miște. La început, mișcarea este accelerată, dar reducând forța de tracțiune se poate obține o mișcare uniformă a corpului, pe plan.
Măsurând tensiunea în acest moment (cu un dinamometru inserat), constatăm că ea este egală cu greutatea maselor marcate de pe taler. Forța de tracțiune astfel exercitată asupra corpului echilibrează forța de frecare la alunecarea lui pe plan.
Când mișcarea sistemului este uniformă ($\vec{v}=\overrightarrow{const.}$): $F_f = T = m \cdot g$

Realizați experimentele sugerate în figura 2.59 a) și b). Repetați experimentele folosind corpuri paralelipipedice așezate în același mod, dar cu fețe din materiale diferite (metal, cauciuc) și măsurați în fiecare caz forța de frecare.

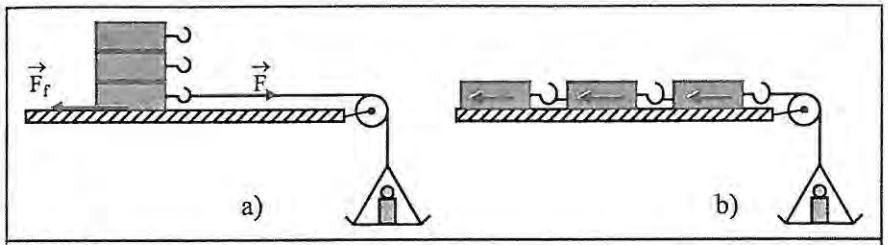


Fig. 2.59

Experimental se obține **prima lege a frecării:**

Forța de frecare la alunecare între două corpuri nu depinde de aria suprafeței de contact dintre corpuri, ci doar de natura și gradul de șlefuire a suprafețelor aflate în contact.

Se măsoară din nou forța de frecare la alunecare punând peste corpul studiat diferite etaloane de masă.
Se obține experimental **legea a doua a frecării**:

Forța de frecare la alunecare este proporțională cu forța de apăsare normală exercitată pe suprafața de contact.

$$\boxed{F_f = \mu \cdot N} \qquad (2.25)$$

Coeficientul μ *se numește coeficient de frecare la alunecare* și este adimensional.

Observații:

➢ Relația $F_f = \mu \cdot N$ este aproximativă deoarece în realitate coeficientul de frecare depinde și de viteza relativă dintre suprafețe. Din experiență, știm că este mai greu să scoatem un corp din repaus decât să-i întreținem mișcarea după ce a pornit. De aici, rezultă că μ este mai mare atunci când începe mișcarea și apoi scade pe măsură ce viteza crește (fig. 2.60).

Tabelul 2.3 *Coeficienți de frecare*

Materiale	Coeficient de frecare static (μ_s)	Coeficient de frecare la alunecare (μ)
Oțel pe oțel	0,74	0,57
Aluminiu pe oțel	0,61	0,47
Cupru pe oțel	0,53	0,36
Zinc pe fier	0,53	0,21
Alamă pe oțel	0,51	0,44
Teflon pe oțel	0,04	0,04
Cupru pe sticlă	0,68	0,53

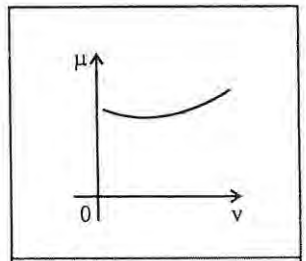


Fig. 2.60

➢ Se poate defini *coeficientul de frecare static* (μ_s) prin raportul dintre forța de frecare statică maximă și forța de apăsare normală. În general $\mu_s > \mu$ (în unele cazuri, diferența dintre coeficienți fiind mică, se poate considera $\mu_s \approx \mu$).

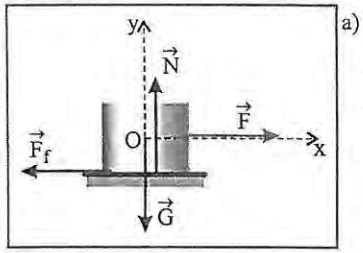
➢ La viteze mari coeficientul de frecare începe să crească și poate fi considerat ca fiind proporțional cu viteza de deplasare. În cazul în care viteza crește și mai mult, coeficientul de frecare ajunge să crească și mai repede, fiind proporțional cu pătratul vitezei.

Probleme rezolvate

1

Un corp cu masa m = 5 kg *se mișcă uniform pe o suprafață orizontală. Cunoscând* $\mu = 0{,}2$ *și* $g = 10 m/s^2$ *determinați forța de tracțiune ce acționează asupra corpului: a) orizontal și b) sub unghiul* $\alpha = 30°$ *față de orizontală.*

Rezolvare:



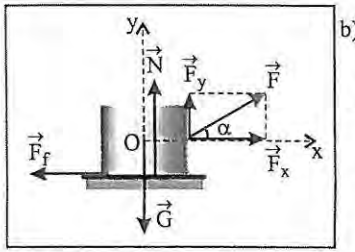
a) $\vec{F} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} = \vec{0}$

Ox: $F - F_f = 0 \Rightarrow F = F_f$

Oy: $N - G = 0 \Rightarrow N = G = mg$

Dar: $F_f = \mu N = \mu mg$ deci, $F = \mu mg$

numeric: $F = 10$ N



b) $\vec{F} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} = \vec{0}$

Ox: $F_x - F_f = 0 \Rightarrow F_x = F_f$

Oy: $N + F_y - G = 0 \Rightarrow N = G - F_y$

Dar: $F_f = \mu N = \mu(G - F_y)$ deci, $F_x = \mu(G - F_y)$

Proiecțiile forței pe cele două axe sunt: $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\sin\alpha$

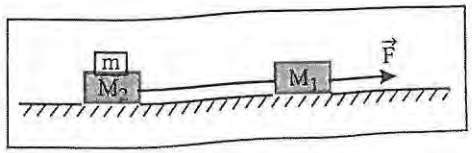
$$F\cos\alpha = \mu(G - F\sin\alpha) \qquad F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu G$$

$$F = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \qquad F = 10{,}36 \text{ N}$$

2

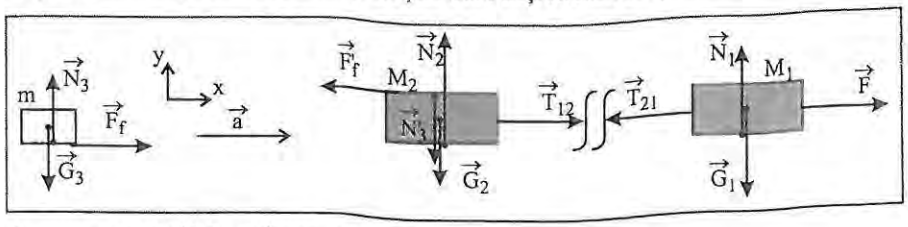
În sistemul din figură corpurile au masele: $M_1 = 5$ kg, $M_2 = 3$ kg, m = 1 kg *și forța de tracțiune orizontală are valoarea* F = 18 N. *Între corpurile* M_1 *și* M_2, *și suprafața orizontală nu există frecare, iar corpul* m *nu alunecă față de* M_2.

Dacă g = 10 m/s² *să se afle toate forțele care acționează asupra corpurilor și accelerațiile lor (firul este inextensibil și imponderabil).*



Rezolvare:

Reprezentăm separat corpurile și forțele care acționează asupra lor.



Asupra corpului M_1 acționează:
- forța de tracțiune $\vec{F}$ (produsă de exemplu de mâna unui om);
- reacțiunea $\vec{N}_1$ exercitată de suprafața orizontală cu care corpul este în contact;
- greutatea $\vec{G}_1 = M_1\vec{g}$ exercitată de Pământ;
- tensiunea $\vec{T}_{21}$ exercitată de M_2 prin intermediul firului.

Asupra corpului M_2 acționează:
- tensiunea $\vec{T}_{12}$ exercitată de corpul M_1 prin intermediul firului;
- reacțiunea $\vec{N}_2$ exercitată de suprafața orizontală, cu care corpul este în contact;
- greutatea $\vec{G}_2 = M_2\vec{g}$ exercitată de Pământ;
- reacțiunea $\vec{N}_3'$ exercitată de corpul m;
- forța de frecare $\vec{F}_f'$ exercitată de corpul de masă m.

Asupra corpului m acționează:
- forța de frecare $\vec{F}_f$ (ca forță de tracțiune) exercitată de corpul M_2;
- greutatea $\vec{G}_3 = m\vec{g}$ exercitată de Pământ;
- reacțiunea $\vec{N}_3$ exercitată de corpul M_2.

Deoarece firul este inextensibil și m nu alunecă față de M_2, toate corpurile vor avea accelerația orizontală $\vec{a}$.

Aplicăm pentru fiecare corp în parte principiul fundamental al mecanicii (II):

$$\begin{cases} M_1\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}_{21} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 \\ M_2\vec{a} = \vec{T}_{12} + \vec{F}_f' + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{N}_3' \\ m\vec{a} = \vec{F}_f + \vec{N}_3 + \vec{G}_3 \end{cases}$$

Aplicăm principiul al III-lea al mecanicii:

$\vec{T}_{12} = -\vec{T}_{21}$; $\quad T_{12} = T_{21} = T$

$\vec{F}_f = -\vec{F}_f'$; $\quad F_f = F_f'$

$\vec{N}_3 = -\vec{N}_3'$; $\quad N_3 = N_3'$

Scriem relațiile între proiecțiile mărimilor corespunzătoare pe axele Ox și Oy:

$$Ox: \begin{cases} M_1a = F - T \\ M_2a = T - F_f \\ ma = F_f \end{cases} \quad Oy: \begin{cases} 0 = N_1 - G_1 \\ 0 = N_2 - N_3 - G_2 \\ 0 = N_3 - G_3 \end{cases}$$

Rezolvând primul sistem de ecuații obținem:

$$(M_1 + M_2 + m)a = F \Rightarrow a = \frac{F}{M_1 + M_2 + m}; \quad a = 2\frac{m}{s^2}$$

$$F_f = ma = \frac{mF}{M_1 + M_2 + m}; \quad F_f = 2N$$

$$T = M_2a + F_f = \frac{M_2F}{M_1 + M_2 + m} + \frac{mF}{M_1 + M_2 + m} = \frac{F(M_2 + m)}{M_1 + M_2 + m}; \quad T = 8N$$

Din al doilea sistem obținem:

$$N_1 = G_1 = M_1g\ ;\ N_1 = 50\ N$$

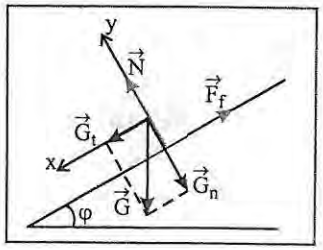
$$N_3 = G_3 = mg\ ;\ N_3 = 10\ N$$

$$N_2 = N_3 + G_2 = mg + M_2g = (m + M_2)g\ ;\ N_2 = 40\ N$$

3

Un corp de masă m *este așezat pe un plan înclinat. Unghiul de înclinare al planului poate fi modificat.*
Găsiți unghiul pentru care corpul alunecă cu viteză constantă pe plan.

Rezolvare:



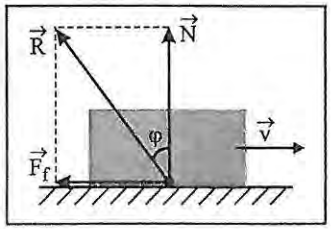
Componentele greutății pe cele două axe sunt:
Ox: $G_t = G\sin\varphi$
Oy: $G_n = G\cos\varphi$
Aplicăm principiul fundamental al mecanicii:

$$\vec{0} = \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{N}$$

Proiectând forțele pe axe:
Oy: $G_n - N = 0 \Rightarrow N = G_n = G\cos\varphi$
Ox: $G_t - F_f = 0 \Rightarrow F_f = G_t = G\sin\varphi$

Dar: $F_f = \mu N \Rightarrow G\sin\varphi = \mu G\cos\varphi \Rightarrow \mu = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}; \mu = tg\varphi$

Observație:
➢ Unghiul φ ce verifică relațiile $tg\varphi = \mu$ sau $\varphi = arctg\mu$ se mai numește *unghi de frecare*. Semnificația acestui unghi nu este legată neapărat de lunecarea unui corp pe plan înclinat. Când un corp alunecă pe o suprafață cu frecare, φ este unghiul dintre reacțiunea normală $\vec{N}$ și rezultanta $\vec{R}$ a forțelor cu care suprafața acționează asupra corpului.



2.6.3 FRECAREA ÎN VIAȚA PRACTICĂ

Frecarea este un fenomen foarte des întâlnit în natură și în tehnică. Unele efecte ale frecării sunt utile, altele nu.

Frecarea face posibil:

• *mersul ființelor pe sol* – forța de frecare ($\vec{F}_f$) exercitată de sol asupra piciorului care tinde să se miște față de sol, în spate, ne împinge înainte (fig. 2.61).

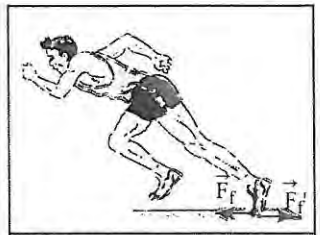


Fig. 2.61

• *înaintarea vehiculelor* – forța de frecare exercitată asupra roții este orientată înainte (roata împinge asfaltul înapoi) și ea acționează ca forță de tracțiune.

• *echilibrul corpurilor pe suprafețe ușor înclinate* – forța de frecare este orientată în sus, în sens invers componentei tangențiale a greutății (fig. 2.62).

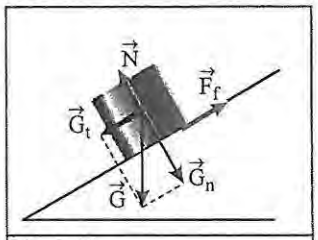


Fig. 2.62

• *frânarea vehiculelor* – pentru aceasta la periferia roții există saboți (piese metalice speciale) care prin apăsare pe marginea roții frânează rotația roții, sau plăci de frână care apasă pe discul roții.

• *legarea nodurilor la sfori* pentru ambalarea mărfurilor, *ținerea cu degetele mâinii* a diferitelor obiecte.

• *apariția diferitelor forme de relief ale Pământului* – există forțe de frecare nu numai între solid și solid, ci și între solid și fluid (apă, aer) care produc eroziunea rocilor mari alături de acțiunea dizolvantă a apelor.

• *transmisia mişcării de rotaţie prin roţi dinţate şi curele de transmisie* – cu roţi late şi curele late se pot transmite forţe mari (fig. 2.63 a). Roţile dinţate (fig. 2.63 b) se folosesc frecvent la maşini-unelte, vehicule etc.

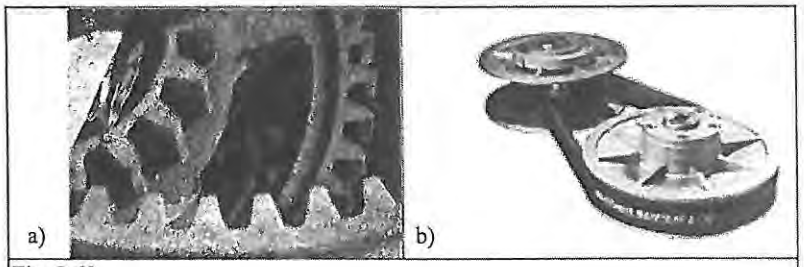


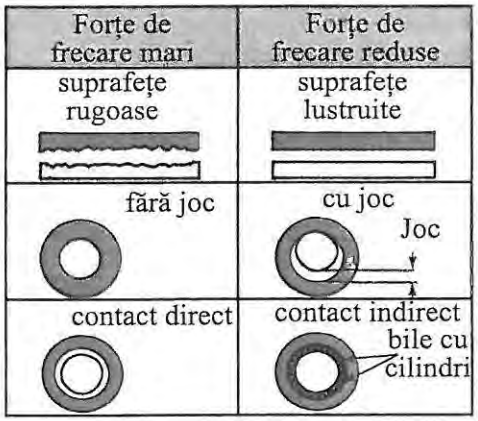
Fig. 2.63

Daţi exemple de situaţii în care frecarea este utilă.

Din cauza frecării:
– se tocesc piesele mobile ale maşinilor;
– se dezvoltă energie sub formă de căldură care duce la deformarea pieselor sau chiar topirea lor.

Pentru a mări forţa de frecare:
– pe cauciucurile roţilor autovehiculelor se imprimă reliefuri;
– curelele de transmisie se impregnează cu sacâz.

Micşorarea efectelor frecării se poate realiza prin:
• polizarea (şlefuirea) suprafeţelor de contact;
• ungerea cu lubrifianţi (ulei, vaselină) a pieselor mobile;
• înlocuirea frecării la alunecare cu frecarea de rostogolire (de exemplu, cu ajutorul rulmenţilor de oţel);
• lăsând un "joc" între suprafeţele care se află în contact;
• utilizarea la autovehicule a pernei de aer (motoare speciale creează o pătură de aer sub vehicul pe care acesta alunecă).

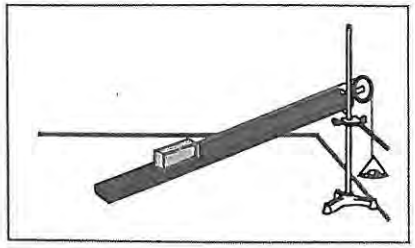


Lucrare de laborator

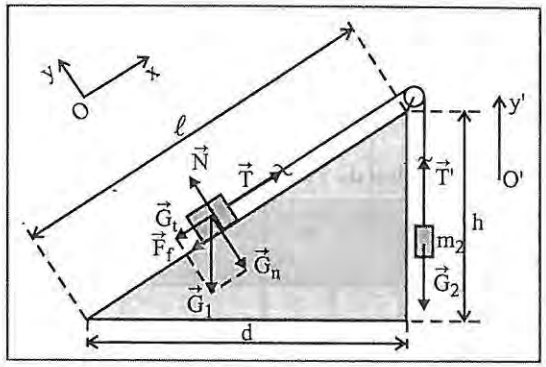
Determinarea coeficientului de frecare la alunecare dintre un corp şi suprafaţa unui plan înclinat.

1. Materiale necesare:
• plan înclinat, de unghi variabil, prevăzut cu scripete fix la vârf;
• corp paralelipipedic de lemn;
• suport pentru discuri crestate (taler);
• mase marcate (discuri crestate);
• dinamometru;
• fir de aţă inextensibil;
• riglă.

2. Dispozitivul experimental



3. Principiul teoretic al metodei



Când corpurile de greutăţi G_1 şi G_2 se mişcă cu viteză constantă (acceleraţie nulă) principiul fundamental al mecanicii se scrie pentru fiecare:

$$\begin{cases} \vec{T}+\vec{G}_{1_t}+\vec{F}_f+\vec{N}+\vec{G}_{1_n}=\vec{0} \\ \vec{G}_2+\vec{T}'=\vec{0} \end{cases}$$

Relaţiile corespunzătoare proiecţiilor forţelor pe axe sunt:

$$\begin{array}{l} \text{pe Ox:} \\ \text{pe Oy:} \\ \text{pe O'y':} \end{array} \begin{cases} T-F_f-G_{1_t}=0 \\ N-G_{1_n}=0 \\ T'-G_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T=F_f+G_{1_t} \\ N=G_{1_n}=G_1\cos\alpha \\ T'=G_2 \end{cases}$$

$T = T' \Leftrightarrow F_f + G_{1t} = G_2 \Rightarrow F_f = G_2 - G_{1t}$

Coeficientul de frecare este:

$$\mu = \frac{F_f}{N} = \frac{G_2 - G_{1_t}}{G_{1_n}} = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\alpha}{m_1 g \cos\alpha} = \frac{m_2 - m_1 \frac{h}{\ell}}{m_1 \frac{d}{\ell}}; \quad \mu = \frac{m_2 \ell - m_1 h}{m_1 d}$$

4. Modul de lucru:

– măsurați greutatea corpului paralelipipedic G_1 cu dinamometrul și calculați masa lui $m_1 = \frac{G_1}{g}$;

– realizați montajul experimental;

– măsurați lungimea (ℓ), înălțimea (h) a planului înclinat și baza (d) (sau puteți să calculați $d = \sqrt{\ell^2 - h^2}$);

– puneți pe taler mase marcate și găsiți masa totală m_2 a talerului cu mase marcate, pentru cazul în care corpul de pe plan va urca aproximativ uniform (pornire datorată unui mic impuls);

– repetați experimentul de cel puțin trei ori (pentru aceeași față a corpului m_1 în contact cu planul);

– pentru a determina coeficientul de frecare corespunzător altei perechi de suprafețe, așezați corpul pe plan cu o altă față; repetați în acest caz experimentul de cel puțin trei ori;

– înregistrați datele într-un **Tabel de valori:**

Nr. det.	Materiale în contact	G_1 (N)	m_1 (kg)	m_2 (kg)	h (cm)	ℓ (cm)	d (cm)	μ	$\bar{\mu}$
1 ⋮	Lemn pe Al								

5. Interpretarea rezultatelor

Pentru care pereche de suprafețe (materiale) ați găsit o valoare mai mică? Precizați sursele de erori și măsurile ce se impun pentru diminuarea lor.

PROBLEME

1

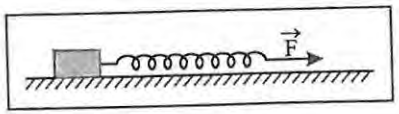
Un copil trage uniform o sanie, pe un drum orizontal, cu o forță F = 20 N, care face un unghi $\alpha = 60°$ cu orizontala.
Ce valoare are forța de frecare dintre sanie și zăpadă?

2

Un corp cu masa de 5 kg se află în repaus pe un plan orizontal. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}4$. Ce accelerație imprimă corpului o forță orizontală cu modulul: a) 10 N; b) 30 N ($g \cong 10 m/s^2$)?

3

Corpul de masă m = 1 kg, reprezentat în figură, se deplasează sub acțiunea unei forțe orizontale $\vec{F}$. Când viteza corpului este constantă alungirea constantă a resortului este $\Delta\ell = 2$ cm. Cunoscând coeficientul de frecare dintre corp și plan $\mu = 0{,}4$ și considerând $g = 10\ m/s^2$ aflați:
a) constanta elastică a resortului;
b) accelerația corpului în cazul în care alungirea constantă a resortului este $\Delta\ell' = 4$ cm.

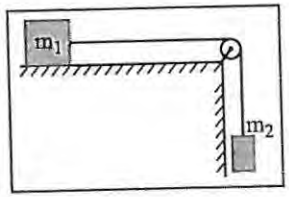


4

O forță $\vec{F}$ paralelă cu un plan înclinat de unghi α ($\sin\alpha = 0{,}6$) menține în echilibru pe plan un corp de masă m = 4 kg. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}5$, iar $g \cong 10 m/s^2$.
Ce valori poate avea forța $\vec{F}$?

5

Un corp cu masa m_1, așezat pe un plan orizontal, este legat prin intermediul unui fir ideal de un al doilea corp de masă $m_2 = 2m_1$, ca în figură. Accelerația sistemului este a_1. Ce valoare are accelerația a_2 a sistemului, dacă se schimbă corpurile între ele? Coeficientul de frecare dintre fiecare corp și planul orizontal este $\mu = 0{,}4$.



6

O locomotivă trage, cu o forță orizontală $\vec{F}$, un tren format din n vagoane identice, pe o cale ferată, orizontală.
Să se afle tensiunile din toate cablurile ce leagă vagoanele între ele.

7

Pe o suprafață orizontală, fără frecări, se află o scândură de masă M și pe ea un corp de masă m, ambele în repaus. Între corpurile M și m există frecare, coeficientul de frecare fiind μ.
Ce accelerație vor avea corpurile dacă se trage orizontal de corpul m cu forța constantă $\vec{F}$?

2.7 LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE

Acțiunile reciproce între corpuri se transmit fie prin *contact*, fie *de la distanță*, prin intermediul câmpurilor (electric, magnetic, gravitațional etc.).

Galileo Galilei (1564-1642) pe baza observațiilor experimentale a formulat concluzia că "*dacă efectele frecărilor sunt neglijabile, orice obiect care cade liber în vecinătatea suprafeței Pământului se mișcă accelerat cu aceeași accelerație, indiferent de masa lui*".

Observațiile astronomice l-au condus pe J. Kepler (în anul 1619) la formularea legilor care descriu mișcarea planetelor în jurul Soarelui.

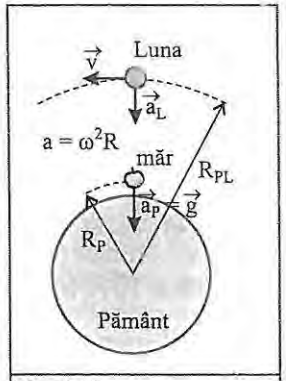


Fig. 2.64

Isaac Newton (1643-1727) a preluat aceste observații și studiind căderea corpurilor pe Pământ și mișcarea Lunii față de Pământ, a presupus că între corpuri și Pământ, între Pământ și Lună, se exercită forțe de atracție. Aceste forțe depind de masa corpurilor și de distanța dintre ele.

Mai mult decât atât, Newton a afirmat că toate corpurile din Univers exercită forțe de atracție, unele asupra altora și a enunțat **legea atracției universale**:

Oricare două corpuri punctiforme se atrag cu forțe orientate de-a lungul dreptei determinată de corpuri, al căror modul este direct proporțional cu masele corpurilor și invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele.

$$\boxed{F = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad (2.26)$$

Observații:

➢ Forțele de atracție universală se mai numesc și *forțe gravitaționale*. Ele nu trebuie confundate cu alte forțe de atracție dintre corpuri (de exemplu: cele dintre un magnet și un corp din fier; cele dintre două corpuri electrizate cu sarcini de semne opuse etc.).

➢ Corpurile reale pot fi considerate punctiforme dacă dimensiunile lor sunt mult mai mici decât distanțele dintre ele.

➢ k este o *constantă universală* având aceeași valoare pentru orice pereche de corpuri din Univers (constanta universală a fost determinată experimental de Henry Cavendish, în anul 1798).

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$$

| Justificați unitatea de măsură a constantei universale k.

Problemă rezolvată

Calculați forța de atracție gravitațională ce se exercită între două corpuri cu masa de 1 kg *fiecare, aflate la suprafața Pământului la distanța de* 1 m *unul de altul.*

$m_1 = m_2 = 1$ kg	$F_{12} = F_{21} = F$
$r = 1$ m	Aplicăm legea atracției universale: $F = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$
$F = ?$	$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N

| Comparați valoarea lui $\vec{F}$ cu greutatea unuia dintre corpuri.

➢ Forța de atracție dintre două corpuri aflate la suprafața Pământului are valoarea foarte mică în raport cu forța de atracție exercitată de Pământ asupra fiecărui corp, astfel încât efectul primei forțe nu poate fi observat direct. Efectul forței de atracție universală dintre două corpuri este considerabil dacă cel puțin unul dintre corpuri are masă foarte mare (Soarele, Pământul, Luna etc.).

➢ Forța gravitațională exercitată de un corp cu masa M asupra unui corp cu masa m poate fi exprimată vectorial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -k \frac{Mm}{r^3} \cdot \vec{r}} \qquad (2.27)$$

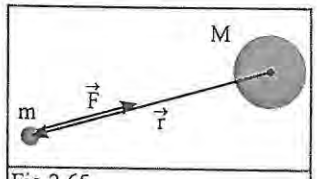


Fig.2.65

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție în raport cu un sistem de coordonate xOyz, în originea căruia se află corpul M.

2.7.1 CÂMPUL GRAVITAȚIONAL

Forța de atracție gravitațională acționează instantaneu, de la distanță prin intermediul câmpului gravitațional.

Dacă în apropierea Pământului (considerat izolat de alte corpuri cerești) se află un corp cu masa m ($m << M_p$), atunci asupra lui se exercită o forță de atracție pe direcția razei Pământului (considerat sferic) care trece prin acel punct (fig. 2.66).

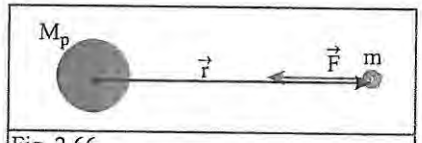


Fig. 2.66

$$\boxed{F = k \cdot \frac{mM_p}{r^2}} \qquad (2.28)$$

Forța cu care Pământul atrage un corp este greutatea acelui corp: $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$

$$G = F \Rightarrow \qquad mg = k \cdot \frac{mM_p}{r^2}$$

Accelerația gravitațională în punctul în care se află corpul este:

$$\boxed{g = k \cdot \frac{M_p}{r^2}} \qquad (2.29)$$

Vectorial:

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -k \frac{M_p}{r^3} \cdot \vec{r}} \qquad (2.30)$$

Când corpul m se găseşte la înălţimea (altitudinea) h faţă de suprafaţa Pământului, distanţa de la corp la centrul Pământului este $R + h$, unde R este raza Pământului.

$$mg_h = k \cdot \frac{M_p m}{(R+h)^2}$$

unde $\vec{g}_h$ este accelerația gravitațională la altitudinea h.

Rezultă:

$$g_h = k \cdot \frac{M_P}{(R+h)^2} = k \cdot \frac{M_P}{R^2} \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

Accelerația gravitațională la altitudinea h este:

$$\boxed{g_h = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2} \qquad (2.31)$$

unde $g_0 = k \cdot \frac{M_p}{R^2}$ este accelerația gravitațională la suprafața Pământului.

Relația (2.31) ne arată că *accelerația gravitațională scade cu altitudinea*, deci greutatea unui corp nu este, de fapt constantă.

Exemplu:

Un astronaut a cărui masă este 58 kg are la suprafața Pământului greutatea 569 N, în timp ce la o distanță de 25 600 km de centrul Pământului are greutatea de 35,2 N.

Ce masă are un corp a cărui greutate la suprafața Pământului este 35,2 N?

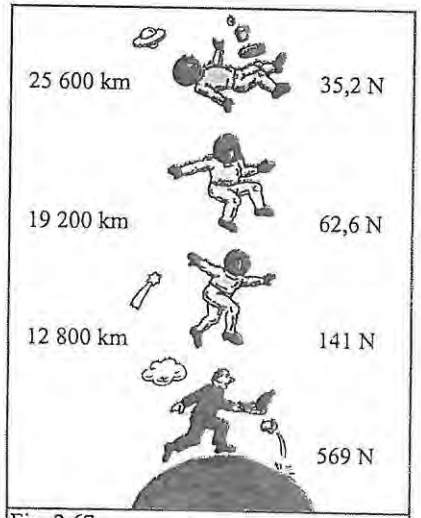


Fig. 2.67

Totuşi, pentru corpuri care cad pe Pământ de la înălțimea h, mult mai mică decât raza Pământului ($h < 3\,000$ m), putem considera (aproxima) că g este constantă în tot timpul căderii şi deci şi greutatea corpului este constantă.

Datorită rotației Pământului în jurul propriei axe, raza Pământului la poli este mai mică decât la ecuator (turtirea Pământului) şi atunci forța de atracție este mai mare la poli decât la ecuator (fig. 2.68).

Accelerația gravitațională (şi greutatea) *variază şi cu latitudinea*.

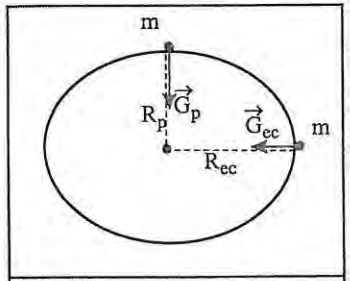


Fig. 2.68

Locul (regiunea)	Latitudinea	g_0 (m/s^2)
Polul Nord	90° N	9,8326
Groenlanda	74° N	9,8276
Bucureşti	45° N	9,8050
St. Thomas	0° N	9,7819
Rio de Janeiro	22° S	9,7877
Malvine	51° S	9,8115

2.7.2 INTENSITATEA CÂMPULUI GRAVITAȚIONAL

Pentru a caracteriza proprietățile unui câmp gravitațional, definim mărimea vectorială **intensitatea câmpului gravitațional** al corpului de masă M ($\vec{\Gamma}$), ca fiind *forța cu care câmpul acționează asupra unității de masă*:

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}} \qquad (2.32)$$

În cazul unui corp sferic omogen de masă M intensitatea câmpului gravitațional în exteriorul corpului este:

$$\vec{\Gamma} = -k \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Unitatea de măsură a intensității câmpului gravitațional în S.I. este: $[\Gamma]_{S.I.} = N/kg$ sau m/s^2

Intensitatea câmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ are aceeaşi expresie ca şi accelerația gravitațională $\vec{g}$ ($g = \Gamma$), semnificația ei fizică este însă alta.

În figura 2.69 este reprezentată intensitatea câmpului gravitațional al Pământului, care are acelaşi modul în punctele egal depărtate de centrul Pământului, adică în punctele de pe suprafața unei sfere cu centrul în C. Câmpul gravitațional are simetrie sferică.

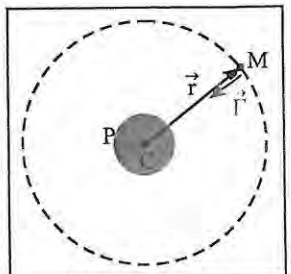


Fig. 2.69

Câmpul gravitațional, ca orice câmp fizic, poate fi reprezentat şi prin linii de câmp. *Liniile de câmp gravitațional* sunt curbe la care vectorul $\vec{\Gamma}$ (intensitatea câmpului) este tangent în orice punct.

Sensul liniei coincide cu sensul vectorului intensitate a câmpului gravitațional ($\vec{\Gamma}$).

Pentru un corp sferic omogen liniile de câmp sunt reprezentate în figura 2.70 şi ele coincid cu direcţiile razelor care pornesc din centrul corpului; un astfel de câmp este un *câmp radial* (central).

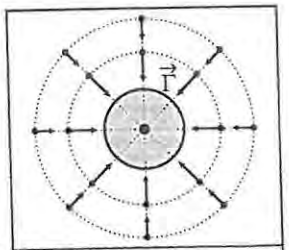


Fig. 2.70

Observaţii:

➢ Câmpul gravitaţional al Pământului este un câmp radial.

➢ În imediata vecinătate a Pământului, în regiuni de mică întindere (de exemplu, în sala de clasă), în puncte diferite din această regiune, intensitatea câmpului gravitaţional are aceeaşi valoare (Γ = const.), iar direcţiile vectorilor intensitate sunt paralele şi echidistante. Un astfel de câmp se numeşte *câmp uniform* (fig. 2.71).

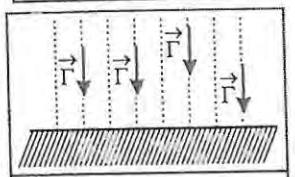
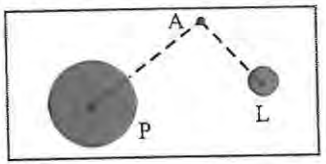


Fig. 2.71

➢ În cazul mai multor corpuri ce generează câmpuri gravitaţionale, intensitatea câmpului gravitaţional rezultant într-un punct este suma vectorială a intensităţilor câmpurilor generate separat şi independent de fiecare corp în parte.

Reprezentaţi intensitatea câmpului gravitaţional a două corpuri (P) şi (L) într-un punct A, situat faţă de cele două corpuri ca în figura alăturată.



Probleme rezolvate

1

Calculaţi masa (M) *şi densitatea medie* (ρ_m) *a Pământului.*
Se cunosc: accelerația gravitaţională la suprafaţa Pământului $g_0 \approx 9{,}8$ m/s^2 *şi raza Pământului* R = 6 370 km.

Rezolvare:

$$g_0 = \frac{kM}{R^2} \qquad M = \frac{g_0 R^2}{k} \qquad \text{numeric: } M \cong 5{,}96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \qquad \rho_m = \frac{M}{V} = \frac{3g_0}{4\pi R k} \qquad \text{numeric: } \rho_m \cong 5500 \text{ kg/m}^3$$

2

O planetă sferică omogenă are la suprafaţa ei accelerația gravitaţională g_0.
a) Să se găsească expresia accelerației gravitaţionale într-un punct interior situat la distanţa r *faţă de centrul planetei cunoscând că aceasta este direct proporţională cu masa conţinută în sfera imaginară de rază* r *concentrică cu planeta şi invers proporţională cu pătratul razei acesteia.*
b) Să se demonstreze că într-o cavitate sferică oarecare din interiorul planetei câmpul gravitaţional este riguros uniform.

Rezolvare:

a) Conform enunţului: $g(r) = C \cdot \frac{m_r}{r^2} = C \cdot \frac{\rho V_r}{r^2} = \frac{C\rho}{r^2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} C \cdot \rho \cdot r = \alpha \cdot \rho \cdot r$

unde $\frac{4\pi}{3} \cdot C = \alpha = \text{const}$

Relaţia poate fi scrisă şi vectorial: $\vec{g}(\vec{r}) = -\alpha \cdot \rho \cdot \vec{r}$

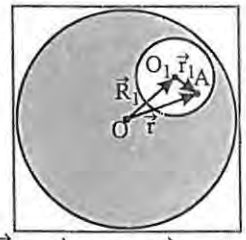
Putem afla constanta $\alpha\rho$ din condiţia ca la suprafaţa planetei accelerația gravitaţională să fie g_0: $\quad g_0 = \alpha\rho R \Rightarrow \alpha\rho = \frac{g_0}{R}$

Aşadar: $\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{g_0}{R} \cdot \vec{r}$

b) Considerăm câmpul gravitaţional în cavitate ca rezultat al suprapunerii câmpului dat de sfera întreagă (de rază R) de masă (şi densitate) pozitivă cu cel creat de o sferă cu centrul în O_1 (centrul cavităţii) având raza cavităţii şi masa (şi densitatea) negativă.
Astfel într-un punct oarecare A al cavităţii:

$$\vec{g}_A = (-\alpha\rho\vec{r}) + [-\alpha(-\rho)\vec{r}_1] = -\alpha\rho(\vec{r} - \vec{r}_1) = -\alpha\rho\vec{R}_1 \Rightarrow \vec{g}_A \uparrow\downarrow \vec{R}_1$$

Cum A este un punct oarecare, iar $\vec{R}_1$ este vectorul de poziţie al centrului O_1 al cavităţii faţă de centrul O al planetei (vector ce nu depinde de punctul A), rezultă că în cavitate:



$$\vec{g} = -\alpha\rho\vec{R}_1 = -\frac{g_0}{R} \cdot \vec{R}_1 = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Observăm că în cazul unei cavităţi concentrice cu planeta ($\vec{R}_1 = \vec{0}$) $\Rightarrow \vec{g} = \vec{0}$ (*stare de imponderabilitate* pentru orice corp aflat în interiorul cavităţii).

3

De pe Pământ se vede Soarele sub unghiul $\alpha = 32'$. *Dacă distanţa Pământ-Soare este* d = 149,5 · 10^6 km, *iar durata anului este* T = 365,25 zile, *să se afle accelerația gravitaţională (de cădere liberă) la suprafaţa Soarelui.*

Rezolvare:

Considerând că Pământul are o mişcare circulară în jurul Soarelui, $T = 2\pi/\omega$ reprezintă perioada acestei mişcări. Aplicăm principiul al II-lea al mecanicii:

$$m \cdot a = F_{SP}$$

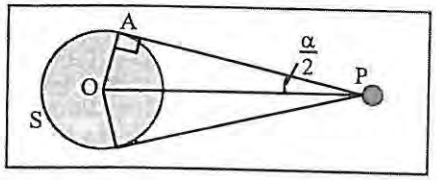
unde F_{SP} este forţa de atracţie exercitată de Soare asupra Pamântului.

$$m\omega^2 d = k\frac{Mm}{d^2}\ ; \qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d = \frac{kM}{d^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 d^3}{kT^2} \qquad \text{(M, masa Soarelui)}$$

Am stabilit că la suprafața unui corp sferic care generează câmp gravitațional accelerația gravitațională este:

$$g_0 = \frac{kM}{R^2}$$

Această relație este corectă și în cazul Soarelui, dar trebuie să aflăm raza R a acestuia; din figura alăturată se observă că:



$$R = OA = OP \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = d \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Deoarece α este foarte mic: $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ (α exprimat în *radiani*).

Rezultă: $R = d\frac{\alpha}{2}$

Accelerația gravitațională devine:

$$g_0 = \frac{kM}{R^2} = k\left(\frac{2}{\alpha d}\right)^2 \cdot \frac{4\pi^2 d^3}{kT^2} = \frac{16\pi^2 d}{\alpha^2 T^2}$$

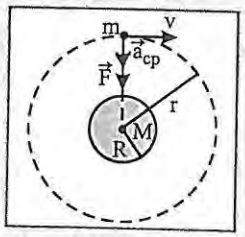
Valoarea unghiului exprimat în radiani este: $\alpha = 0{,}0093$ rad $\Rightarrow g_0 \cong 274$ m/s^2

Prima viteză cosmică

Viteza care trebuie imprimată unui corp pentru a avea o mișcare circulară uniformă de rază r în jurul Pământului, adică pentru a deveni *satelit*, poate fi calculată.

Asupra corpului acționează forța de atracție gravitațională a Pământului (se consideră neglijabile orice frecări).

Aplicăm principiul al II-lea al mecanicii:



$m\vec{a}_{cp} = \vec{F}$; scalar: $ma_{cp} = F$

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kM}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

În cazul mișcării în imediata apropiere a suprafeței Pământului $r \approx R$ și obținem:

$$v_1 = R\sqrt{\frac{g_0}{R}} = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6370 \cdot 10^3} = 7900\frac{m}{s} = 7{,}9\frac{km}{s}$$

Această valoare se numește *prima viteză cosmică*.

Isaac Newton - repere biografice

Isaac Newton (1643-1727) s-a născut la câteva luni după moartea lui Galileo Galilei și a fost un geniu în fizică, matematică și astronomie.

Copil fiind era foarte timid și nu se juca cu copiii de vârsta lui. Își construia de unul singur diverse jucării mecanice (printre ele o moară acționată de un șoricel, un zmeu cu lanternă cu care-i speria pe țărani).

La vârsta de 12 ani a fost trimis să învețe la școala din orășelul Grantham. Stând în gazdă la farmacistul Clark, în timpul liber, a învățat să facă experiențe de chimie. A absolvit cu mult succes școala din Grantham.

În vara anului 1661 se înscrie la Trinity College din Cambridge (cea mai prestigioasă universitate din Anglia pe atunci). După absolvire în 1665 devine licențiat în matematică.

Imediat după absolvirea Colegiului din Cambridge izbucnește la Londra o ciumă și Newton se retrage timp de 18 luni în satul natal (Woolsthorpe). În această perioadă descoperă teorema binomului, calculul diferențial (derivatele), teoria culorilor și face introducerea în calculul integral. Newton însuși povestește că în 1666 "*am început să mă gândesc la gravitație, extinzând-o la orbita Lunii ... și ... să o compar cu forța necesară pentru a ține Luna pe orbita ei cu ajutorul forței de gravitație de la suprafața Pământului*".

La vârsta de 26 de ani Newton ia ultimul său titlu, Master of Arts (doctor în litere).

Din octombrie 1669 devine profesor la Trinity College din Cambridge.

Între 1669 și 1670 construiește singur telescopul cu viziune laterală (care azi îi poartă numele). La 11 februarie 1672 prezintă Societății Regale din Londra un al doilea telescop (mai mare) construit de el în 1670. Acest moment a determinat alegerea sa ca membru la Societății Regale. La scurt timp după alegerea sa Newton își prezintă experimentele sale de optică și teorie a dispersiei stârnind controverse cu mai mulți savanți contemporani printre care Hooke și Huygens.

Academia de Științe din Paris îl alege pe Newton ca membru străin al ei, iar după aceea (1703) este ales președinte al Societății Regale din Londra.

În 1704 apare cartea sa de optică, iar în 1705 primește de la regina Ana a Angliei titlul de baronet, motiv pentru care de aici încolo se va numi Sir Isaac.

Moare la 31 martie 1727 și este înmormântat cu onoruri pe care le aveau numai regii.

PROBLEME

1

Calculați valoarea forței gravitaționale ce se exercită între Soare și planeta Jupiter. Se cunosc: masa planetei Jupiter $1{,}9 \cdot 10^{22}$ kg, masa Soarelui $2 \cdot 10^{30}$ kg și distanța dintre Soare și planeta Jupiter $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m.

2

La ce distanță față de centrul Lunii, pe dreapta determinată de centrul Lunii și cel al Pământului, forțele exercitate de Lună și Pământ asupra aceluiași corp sunt egale și de același sens?
Se cunoaște distanța Pământ-Lună $d = 384\,000$ km și $M_P = 81M_L$.

3

Raportul razelor a două planete este n, iar raportul maselor este k. Aflați valoarea raportului accelerațiilor gravitaționale la suprafețele planetelor respective.

4

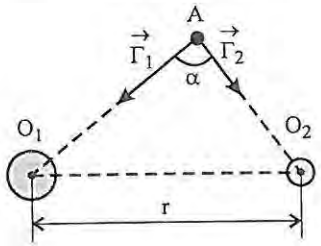
Un corp este în stare de imponderabilitate dacă rezultanta forțelor gravitaționale care acționează asupra sa este nulă. Unde se află o navă cosmică ce călătorește între Pământ și Lună astfel încât corpurile din navă să fie în stare de imponderabilitate?
Se cunosc: distanța Pământ-Lună $d = 384 \cdot 10^3$ km și $M_P = 81M_L$.

5

La suprafața Pământului accelerația gravitațională la poli diferă de cea de la ecuator ($g_P = 9{,}83$ m/s^2 și $g_E = 9{,}78$ m/s^2). La ce altitudine deasupra unui pol accelerație gravitațională are aceeași valoare ca și la ecuator? Se consideră $R_P = 6\,370$ km.

6

Două corpuri cerești generează în punctul A câmpuri gravitaționale de intensități $\Gamma_1 = 2$ N/kg și respectiv $\Gamma_2 = 1$ N/kg.



Dacă $O_1A = \frac{3r}{4}$ și $O_2A = \frac{r(2\sqrt{37} - 6)}{16}$, să se afle:
a) unghiul α;
b) intensitatea câmpului rezultant în A;
c) ce forță ar acționa asupra unui corp de masă $m = \sqrt{3}$ kg plasat în punctul A.

TEST

I

Alegeți varianta corectă și completați enunțurile următoare astfel încât să fie corecte:

a) Expresia matematică a legii lui Hooke este: ....
b) Forța elastică *produce/nu produce* deformarea unui corp și are expresia matematică: ....
c) Constanta elastică este legată de proprietățile materialului și dimensiunile corpului prin relația: $k = \frac{ES_0}{l_0}$ / $k = \frac{El_0}{S_0}$.
d) Unitatea de măsură pentru efortul unitar este ....
e) Unitatea de măsură pentru alungirea absolută este ..., iar alungirea relativă este o mărime ....
1p

II

Alegeți afirmațiile corecte și reformulați-le pe cele incorecte.

a) Forțele de frecare sunt totdeauna în practică dăunătoare.
b) Forța de frecare la alunecare nu depinde de aria suprafeței de contact dintre corpuri.
c) Legea a II-a a frecării la alunecare se scrie: $\vec{F}_f = \mu\vec{N}$.
d) Forțele de frecare la rostogolire sunt mai mici decât forțele de frecare la alunecare (pentru aceeași pereche de materiale).
e) Unitatea de măsură a coeficientului de frecare este newtonul.
1p

III

Corpurile punctiforme A, B, C se află în vârfurile unui triunghi echilateral și relația dintre masele lor este: $m_A = m_B = 2m_C$.

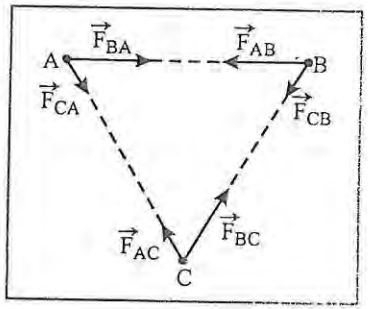
Forțele de interacțiune sunt reprezentate corect pentru corpurile:

a) A și C

b) B și C

c) A și B

1p



IV

Accelerația gravitațională într-un punct caracterizat de vectorul de poziție $\vec{r}$, față de centrul Pământului, are expresia:

a) $\vec{g} = k\dfrac{M}{R^2}\vec{r}$ b) $\vec{g} = -k\dfrac{M}{r^3}\vec{R}$

c) $\vec{g}(\vec{r}) = -k\dfrac{M}{r^3}\vec{r}$ d) $\vec{g}(\vec{r}) = g_0 \cdot \dfrac{R^2}{r^3}\vec{r}$ 1,5p

V

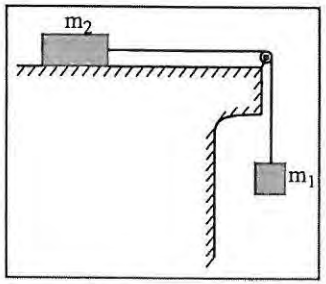
Un fir elastic de constantă elastică k este tăiat în două părți egale care se alătură formând un nou corp. Constanta elastică a noului corp este:

a) 2k b) k/2

c) 4k d) 8k 2p

VI

Corpul de masă m_2 reprezentat în figură se mişcă cu frecare de coeficient $\mu = 0{,}2$. Cunoscând masele corpurilor $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg şi considerând $g = 10$ m/s^2 să se afle accelerațiile corpurilor şi tensiunea din fir (scripetele este ideal, iar firul inextensibil şi imponderabil).

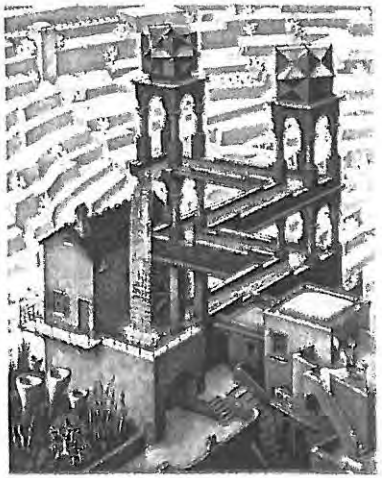


2,5p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute.

3

TEOREME DE VARIAȚIE ŞI LEGI DE CONSERVARE ÎN MECANICĂ



3.1 LUCRUL MECANIC. PUTEREA

NOȚIUNI DE MATEMATICĂ

Produsul scalar a doi vectori

Prin produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se obține numărul (scalarul):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\ \vec{b} = ab\cos\alpha$$

unde, α este unghiul format de cei doi vectori (care au origine comună).

| Justificați de ce valoarea produsului scalar poate fi pozitivă, negativă sau nulă.

3.1.1 LUCRUL MECANIC

În figura 3.1 este reprezentată situația în care un om trage o ladă (prin intermediul unei sfori) pe o suprafață orizontală. Sub acțiunea forței de tracțiune, $\vec{F}_t$, oblică, lada se va deplasa rectiliniu.

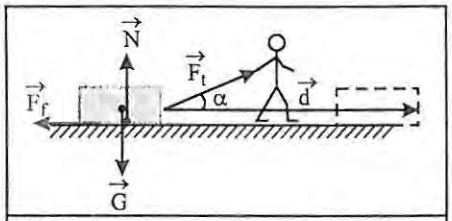


Fig. 3.1

În general, direcția deplasării nu coincide cu direcția forței. Deplasarea punctului de aplicație al forței care acționează asupra lăzii este $\vec{d}$. Spunem, în acest caz, că punctul de aplicație al forței $\vec{F}_t$ se deplasează și atunci forța efectuează *lucru mecanic*.

Lucrul mecanic al unei forțe constante $\vec{F}$ al cărui punct de aplicație are o deplasare $\vec{d}$ este mărimea scalară definită prin relația:

$$\boxed{L_F = \vec{F} \cdot \vec{d}} \qquad (3.1)$$

$L_F = F \cdot d \cdot \cos\alpha$, unde α este unghiul dintre $\vec{F}$ și $\vec{d}$.

Unitatea de măsură a lucrului mecanic în S.I. este:

$$[L]_{S.I.} = [F]_{S.I.} \cdot [d]_{S.I.} = N \cdot m = J \text{ (joule)}$$

Un joule este lucrul mecanic al unei forțe constante de un newton care își deplasează punctul de aplicație, cu un metru, pe direcția și în sensul forței.

Evaluăm lucrul mecanic al fiecărei forțe (fig. 3.1):

• *Lucrul mecanic al forței de tracțiune* (L_{F_t}):

$$L_{F_t} = \vec{F}_t \cdot \vec{d} = F_t \cdot d \cdot \cos\alpha > 0$$

L_{F_t} este *lucrul mecanic motor* (activ), iar $\vec{F}_t$ este o *forță motoare* (activă).

• *Lucrul mecanic al forței de frecare* (L_{F_f}):

$$L_{F_f} = \vec{F}_f \cdot \vec{d} = F_f \cdot d \cdot \cos 180° = -F_f \cdot d < 0$$

L_{F_f} este *lucrul mecanic rezistent*, iar $\vec{F}_f$ este o *forță rezistentă*.

• *Lucrul mecanic al greutății* (L_G):

$$L_G = \vec{G} \cdot \vec{d} = G \cdot d \cdot \cos 90° = 0$$

(în acest caz $\vec{G}$ este o forță pasivă).

• *Lucrul mecanic al normalei* (L_N):

$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = N \cdot d \cdot \cos 90° = 0$$

Lucrul mecanic total (lucrul mecanic al forței rezultante $\vec{R} = \vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f$), este:

$$\boxed{\begin{aligned} L_{total} = L_R &= \vec{R} \cdot \vec{d} = (\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f) \cdot \vec{d} = \\ &= \vec{F}_t \cdot \vec{d} + \vec{N} \cdot \vec{d} + \vec{G} \cdot \vec{d} + \vec{F}_f \cdot \vec{d} = \\ &= L_{F_t} + L_N + L_G + L_{F_f} \end{aligned}} \qquad (3.2)$$

Relația (3.2) exprimă faptul că lucrul mecanic este o *mărime aditivă* (în raport cu forțele).

Putem stabili *aditivitatea* lucrului mecanic și în raport cu deplasările.

O forță $\vec{F}$ deplasează rectiliniu un corp pe distanța:

$$d = d_1 + d_2$$

Lucrul mecanic efectuat pe distanța d_1, respectiv d_2 este: $L_1 = \vec{F} \cdot \vec{d}_1$ și $L_2 = \vec{F} \cdot \vec{d}_2$

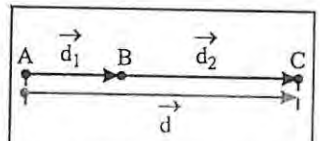


Fig. 3.2

Pentru deplasarea totală $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$ lucrul mecanic este:

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{F}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) = \vec{F}\vec{d}_1 + \vec{F}\vec{d}_2 = L_1 + L_2} \qquad (3.3)$$

Proprietatea de aditivitate în raport cu deplasarea ne permite să definim şi să evaluăm lucrul mecanic într-o situaţie mai generală: când forţa este variabilă (ca modul şi orientare), iar traiectoria este curbilinie (fig. 3.3).

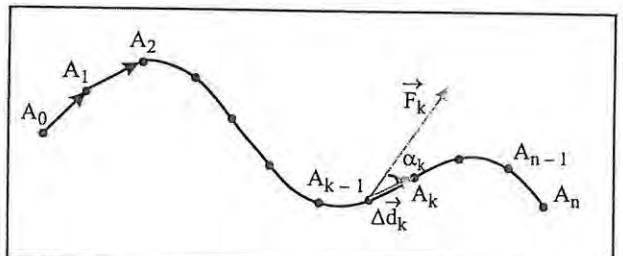


Fig. 3.3

În acest caz împărţim traiectoria corpului în intervale foarte mici ($\vec{\Delta d}_k$) astfel încât pe fiecare dintre ele forţa să poată fi considerată constantă ($\vec{F}_k$), iar deplasarea să poată fi considerată rectilinie.
Pe porţiunea elementară $\vec{\Delta d}_k$ definim lucrul mecanic elementar:

$$\Delta L_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\Delta d}_k = F_k\,|\vec{\Delta d}_k| \cdot \cos\alpha_k$$

Pe distanţa A_1A_n, lucrul mecanic este:

$$\boxed{L_{total} = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \vec{\Delta d}_k = \sum_{k=1}^{n} F_k\,|\,\vec{\Delta d}_k\,|\cos\alpha_k} \qquad (3.4)$$

unde: $\sphericalangle\,\alpha_k = \sphericalangle(\vec{F}_k, \vec{\Delta d}_k)$

Relaţia (3.4) ne permite să evaluăm lucrul mecanic efectuat de o forţă în cazul unei mişcări circulare uniforme.

Exemplu:
Lucrul mecanic al forţei gravitaţionale exercitată asupra unui satelit al Pământului (fig. 3.4).
În acest caz, $\sphericalangle(\vec{G}_k, \vec{\Delta d}_k) = 90°$, indiferent de distanţa parcursă:

$$\Delta L_k = \vec{G} \cdot \vec{\Delta d}_k = 0 \Rightarrow L_{total} = 0$$

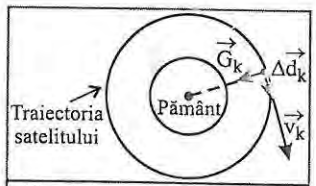


Fig. 3.4

Din acest exemplu putem desprinde chiar o concluzie generală:
O forţă care acţionează permanent perpendicular pe viteză nu efectuează lucru mecanic.

3.1.2 PUTEREA MECANICĂ

În vorbirea curentă se spune uneori că un anumit sistem fizic este mai puternic decât altul. De exemplu: un cal poate să tragă o căruţă mai uşor decât o face un om. Ce înseamnă "mai uşor ?". Înseamnă, de fapt, că acelaşi lucru mecanic, calul îl face într-un timp mai scurt (adică mai repede) decât omul.
Pentru a compara acţiunile mecanice ale diferitelor forţe folosim mărimea fizică numită *putere*.
Puterea mecanică medie (P_m) este mărimea fizică scalară numeric egală cu lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp.

$$\boxed{P_m = \frac{\Delta L}{\Delta t}} \qquad (3.5)$$

Unitatea de măsură a puterii mecanice: $[P]_{SI} = \frac{[L]_{SI}}{[t]_{SI}} = \frac{J}{s} = W(watt)$

| Definiţi wattul.

În practică se mai foloseşte pentru puterea mecanică unitatea de măsură numită *cal putere* (CP):

1CP=736W

Puterea mecanică momentană (instantanee) este:

$$P = \left[\frac{\Delta L}{\Delta t}\right]_{\Delta t \to 0} \qquad (3.6)$$

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta d} \Rightarrow P = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\Delta d}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha} \qquad (3.7)$$

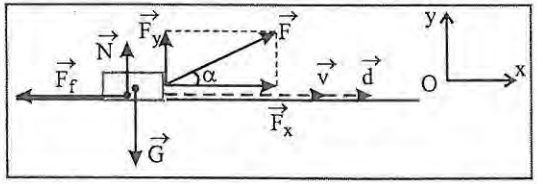
Relaţia (3.7) exprimă faptul că *puterea mecanică la fiecare moment este egală cu produsul dintre proiecţia forţei pe direcţia mişcării şi viteza la momentul respectiv.*

Problemă rezolvată

Un om trage rectiliniu, pe o suprafaţă orizontală, cu viteza constantă $v = 1$ m/s *o ladă cu masa* $m = 38$ kg.
Dacă între ladă şi suprafaţă coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}25$, *să se afle:*
a) valoarea forţei de tracţiune ştiind că unghiul pe care îl face cu suprafaţa orizontală este α ($\cos\alpha = 0{,}8$);
b) lucrul mecanic al forţei de tracţiune şi lucrul mecanic al forţei de frecare în timpul $t = 2$ min;
c) puterea dezvoltată de om.

Rezolvare:

a) Reprezentăm forțele care acționează asupra lăzii, vectorul viteză $\vec{v}$ și deplasarea $\vec{d}$:



Aplicăm principiul al II-lea al mecanicii și scriem relațiile între proiecțiile forțelor pe axe ținând cont că: $\vec{a} = \vec{0}$ ($\vec{v} = \overrightarrow{const.}$):

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f \qquad \text{rezultă:} \qquad \begin{array}{ll} Ox: & 0 = F_x - F_f \\ Oy: & 0 = N + F_y - G \end{array} \qquad (1)$$

Dar: $F_x = F\cos\alpha$; $F_y = F\sin\alpha$; numeric: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6$

Astfel obținem: $N = G - F_y = mg - F\sin\alpha$

Aplicăm legea a doua a frecării la alunecare: $F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$

Din (1) rezultă: $F_x = F_f \Leftrightarrow F\cos\alpha = \mu(mg - F\sin\alpha)$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}; \qquad \text{numeric } F = 100 \text{ N.}$$

b) distanța străbătută în t = 2 min = 120 s este: $d = v \cdot t$; numeric d = 120 m.

Lucrul mecanic al forței de tracțiune $\vec{F}$ exercitată de om:

$$L_{om} = L_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\alpha; \text{ numeric } L_{om} = 100 \cdot 120 \cdot \frac{4}{5} = 9600\text{J}$$

Lucrul mecanic al forței de frecare $\vec{F}_f$:

$$L_{F_f} = \vec{F}_f \cdot \vec{d} = F_f \cdot d \cdot \cos 180° = -F_f \cdot d = -\mu(mg - F\sin\alpha) \cdot d$$

$$L_{F_f} = -0{,}25(38 \cdot 10 - 100 \cdot 0{,}6) \cdot 120 = -9\,600 \text{ J}$$

Valoarea obținută pentru L_{F_f} era de așteptat deoarece:

$$L_{total} = L_F + L_N + L_G + L_{F_f} = L_F + L_{F_f} = \vec{R} \cdot \vec{d} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{d} = 0$$

$$L_{F_f} = -L_F = -9\,600 \text{ J} \quad \text{deoarece } \vec{a} = \vec{0}$$

Deși lucrul mecanic total este nul, aceasta nu înseamnă că nu se face un efort pentru deplasarea corpului.

c) $P_{om} = L_{om}/t$ sau $P_{om} = F \cdot v \cdot \cos\alpha$; numeric $P_{om} = 80$ W

3.1.3 SEMNIFICAȚIA GEOMETRICĂ A LUCRULUI MECANIC

În cazul în care o forță constantă de modul F acționează asupra unui corp pe direcția și în sensul deplasării, graficul forței în funcție de coordonată (distanță) este reprezentat în figura 3.5.

Din grafic, observăm că $F \cdot \Delta x = F(x_2 - x_1)$ reprezintă, din punct de vedere geometric, aria figurii geometrice de sub grafic, care este chiar lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$. $L = F(x_2 - x_1)$

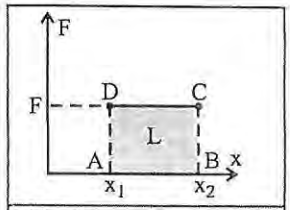


Fig. 3.5

Graficul unei forțe variabile $\vec{F}$ care acționează pe direcția deplasării este reprezentat în figura 3.6.

Între punctele de pe traiectorie de coordonate x_1, x_2, $F > 0$ și acționează ca forță de tracțiune (activă), iar pe intervalul de la x_2 la x_3, $F < 0$ și acționează ca forță rezistentă (de frânare).

$$L_{12} > 0;\ L_{23} < 0;\ L_{13} = L_{12} + L_{23}$$

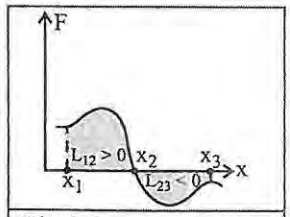


Fig. 3.6

Aflăm lucrul mecanic calculând aria figurii de sub grafic și se determină *forța medie:*

$$F_m = \frac{L_{13}}{\Delta x} = \frac{L_{13}}{x_3 - x_1}$$

În unele situații se pot desprinde concluzii, analizând graficul puterii în funcție de timp (fig. 3.7).

Aria figurii haşurate reprezintă lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$

Aflăm lucrul mecanic calculând aria figurii de sub grafic și se poate determina *puterea medie.*

$$P_m = \frac{L_{12}}{\Delta t} = \frac{L_{12}}{t_2 - t_1}$$

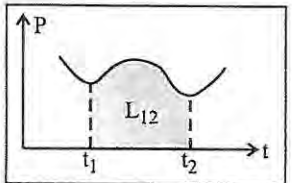
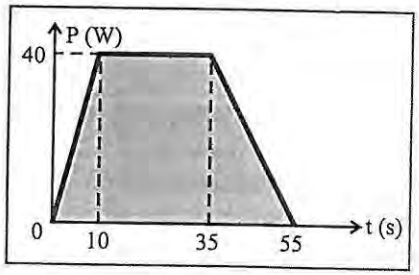


Fig. 3.7

Problemă rezolvată

O jucărie cu motoraș având masa de 1 kg *se mișcă rectiliniu pe o suprafață orizontală. În primele* 35 s *de la pornire motoraşul dezvoltă o forță de tracțiune orizontală constantă* $\vec{F}_1$, *graficul puterii motorului fiind reprezentat în figură. În primele* 10 s *mișcarea este fără frecare, iar din momentul* t_1 = 10 s *până în momentul* t_3 = 55 s *asupra jucăriei acționează o forță de frecare constantă.*

Calculați:
a) valoarea forței $\vec{F}_1$;
b) puterea medie dezvoltată de motoraş pe toată durata mişcării ($\Delta t = 55$ s);
c) valoarea forței de frecare;
d) valoarea vitezei la momentul $t_2 = 35$ s;
e) Cum variază viteza în intervalul de timp [35; 55] s?



Rezolvare:

a) În primele $t_1 = 10$ s jucăria se va mişca cu accelerația constantă $a_1 = \frac{F_1}{m}$ şi va avea viteza $v_1 = a_1 t_1$ la momentul $t_1 = 10$ s.

$$P_1 = P(t_1) = F_1 \cdot v_1 = F_1 \cdot a_1 \cdot t_1 = F_1 \cdot \frac{F_1}{m} \cdot t_1 = \frac{F_1^2 t_1}{m} \Rightarrow F_1^2 = \frac{mP_1}{t_1} \Rightarrow F_1 = \sqrt{\frac{mP_1}{t_1}}$$

numeric: $F_1 = 2$ N

b) Lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune a motorului pe întreg intervalul de timp este egal cu aria trapezului de sub grafic:

$$L_{F_t} = \frac{1}{2}(55 + 25) \cdot 40 = 1600 \text{ J}$$

dar: $L = P_m \cdot \Delta t \Rightarrow P_m = \frac{L_m}{\Delta t}$ numeric: $P_m \cong 29{,}09$ W

c) Deşi în intervalul [10; 35] s forța de tracțiune a motorului acționează, din grafic se observă că $P = \text{const.} \Rightarrow F_1 \cdot v = \text{const.} \Rightarrow v = v_1 = \text{const.} \Rightarrow a_2 = 0$
Aplicăm principiul al II-lea al mecanicii:

$$ma_2 = F_1 - F_f \Rightarrow F_f = F_1; \text{ numeric } F_f = 2 \text{ N}$$

d) Viteza la momentul $t_2 = 35$ s este aceeaşi cu cea de la momentul $t_1 = 10$ s

$$v(t_2) = v(t_1) = v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow v_1 = \frac{F_1}{m} \cdot t_1 \quad \text{numeric: } v_1 = 20 \text{ m/s}$$

e) În intervalul [35; 55] s puterea scade datorită scăderii forței de tracțiune de la valoarea $F_1 = 2$ N la valoarea finală *nulă*. În acest interval scade şi viteza, dar *nu* uniform, pentru că accelerația variază de la $|\vec{a}_2| = 0$ la momentul $t_2 = 35$ s la valoarea $|\vec{a}_3| = \frac{F_f}{m} = 2 \text{ m/s}^2$ la momentul $t_3 = 55$ s

3.1.4 LUCRUL MECANIC AL FORȚEI GRAVITAȚIONALE

Considerăm un punct material de masă m, deplasat în câmp gravitațional uniform ($\vec{g} = \overrightarrow{\text{const.}}$). Evaluăm lucrul mecanic al greutății $\vec{G} = m\vec{g}$ în cazul unor deplasări rectilinii pe verticală, pe oblică şi pe orizontală.

La coborâre, din A în B (fig. 3.8 a):

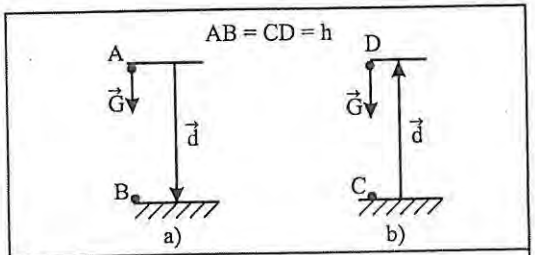


Fig. 3.8

$$L_{G_{AB}} = \vec{G} \cdot \vec{d} = G \cdot d \cdot \cos 0^\circ = mgd = mgh$$

Lucrul mecanic al greutății la coborâre:

$$\boxed{L_G = mgh} \tag{3.8}$$

La urcare, din C în D (fig. 3.8 b):

$$L_{G_{CD}} = \vec{G} \cdot \vec{d} = G \cdot d \cdot \cos 180^\circ = mgd(-1) = -mgh$$

Lucrul mecanic al greutății la urcare:

$$\boxed{L_G = -mgh} \tag{3.9}$$

La coborâre, pe oblică, din A în B (fig. 3.9):

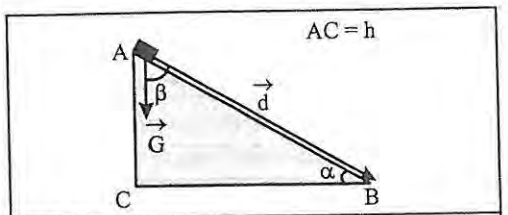


Fig. 3.9

Lucrul mecanic al greutății la coborâre pe oblică:

$$L_{G_{AB}} = \vec{G} \cdot \vec{d} = G \cdot d \cdot \cos\beta = mgd\cos(90 - \alpha) = mgd\sin\alpha = mgh \tag{3.10}$$

La urcare, pe oblică, din B în A (fig. 3.10):

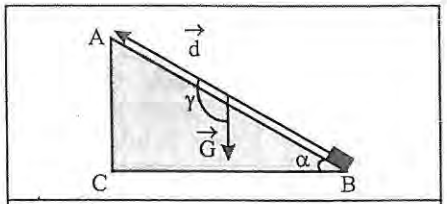


Fig. 3.10

Lucrul mecanic al greutății la urcare pe oblică:

$$L_{G_{BA}} = \vec{G} \cdot \vec{d} = G \cdot d \cdot \cos\gamma = mgd\cos(90 + \alpha) = mgd\cos[90 - (-\alpha)] =$$
$$= mgd\sin(-\alpha) = -mgd\sin\alpha = -mgh \qquad (3.11)$$

Observație:

➢ În cazul deplasărilor pe oblică lucrul mecanic al greutății nu depinde de valoarea deplasării, ci de diferența de nivel h, dintre punctul de plecare și cel de sosire.

La orice deplasare rectilinie orizontală lucrul mecanic al greutății este nul, deoarece unghiul format de greutatea $\vec{G}$ cu deplasarea $\vec{d}$ este 90°, iar cos90° = 0.

În cazul deplasării punctului material pe o traiectorie oarecare, putem aproxima traiectoria printr-o succesiune de porțiuni orizontale, alternând cu porțiuni verticale, deci o traiectorie în formă de scară (fig. 3.11). Cu cât "scara" are mai multe "trepte" cu atât aproximarea este mai bună.

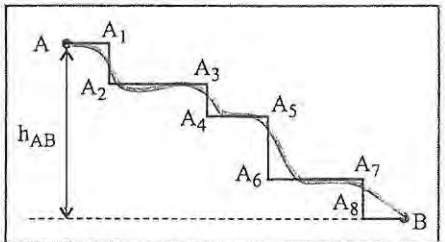


Fig. 3.11

Lucrurile mecanice corespunzătoare deplasărilor pe orizontală (AA_1, A_2A_3 etc.) sunt nule, iar cele corespunzătoare deplasărilor pe verticală sunt nenule:

$$L_{G_{AB}} = mg \cdot A_1A_2 + mg \cdot A_3A_4 + mg \cdot A_5A_6 + mg \cdot A_7A_8 =$$
$$= mg(A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 + A_7A_8) = m \cdot g \cdot h_{AB}$$

În concluzie:

Lucrul mecanic al forței gravitaționale, în cazul câmpului gravitațional uniform, are expresia:

$$\boxed{L_{G_{AB}} = mgh_{AB}} \qquad (3.12)$$

unde $h_{AB} = h_A - h_B$ este diferența de nivel (de înălțime) dintre punctele A și B.

Observație:

➢ $L_{G_{AB}} > 0$, la coborâre ($h_A > h_B$) și $L_{G_{AB}} < 0$, la urcare ($h_A < h_B$).

Lucrul mecanic al forței gravitaționale în cazul în care câmpul gravitațional nu este uniform, adică $\vec{G}$ variază și ca valoare și ca direcție (fig. 3.12) este:

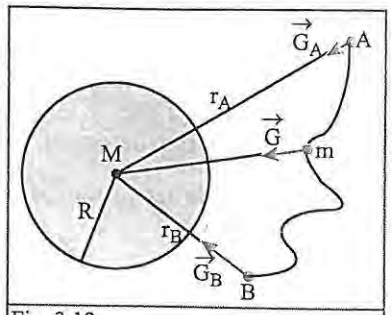


Fig. 3.12

$$\boxed{L_{G_{AB}} = kMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)} \qquad (3.13)$$

sau

$$\boxed{L_{G_{AB}} = mg_0R^2\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)} \qquad (3.13')$$

unde: $g_0 = \frac{kM}{R^2}$ este accelerația gravitațională la suprafața Pământului (planetei).

În concluzie:

Lucrul mecanic al forței gravitaționale în câmp gravitațional neuniform (radial), nu depinde decât de pozițiile inițială și finală a punctului material (prin distanțele r_A și r_B).

O forță al cărei lucru mecanic nu depinde de forma traiectoriei punctului material, ci doar de pozițiile inițială și finală este o *forță conservativă*.

Greutatea este o forță conservativă.

3.1.5 LUCRUL MECANIC AL FORȚEI ELASTICE (extindere)

Acționând cu o forță $\vec{F}$ asupra unui corp prins de un resort aflat inițial nedeformat (relaxat), acesta trece în starea de resort deformat (întins) (fig. 3.13).

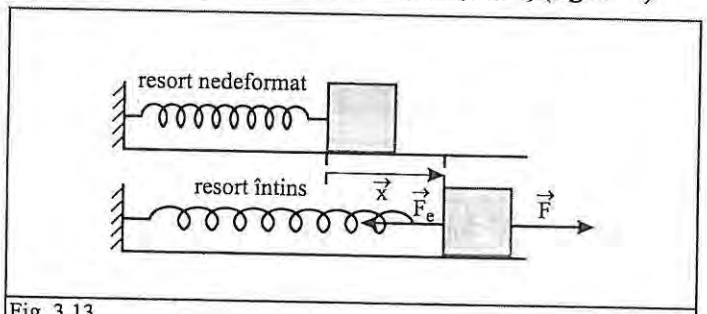


Fig. 3.13

Alungirea resortului este $\vec{x}$.
Inițial, forța elastică este: $\vec{F}_{e0} = \vec{0}$
În final, resortul fiind deformat, forța elastică este: $\vec{F}_e = -k\vec{x}$

$\vec{F}_e$ este variabilă liniar cu alungirea $\vec{x}$, astfel încât vom calcula forța elastică medie:

$$\vec{F}_{em} = \frac{1}{2}(\vec{F}_{e0} + \vec{F}_e) = -\frac{1}{2}k\vec{x} \qquad (3.14)$$

Lucrul mecanic al forței elastice este:

$$L_e = \vec{F}_{em} \cdot \vec{x} = -\frac{1}{2}k \cdot \vec{x} \cdot \vec{x} = -\frac{1}{2}k \cdot \vec{x}^2 = -\frac{1}{2}kx^2$$

(deoarece $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^2 = x^2$ este un scalar pozitiv)

$$\boxed{L_e = -\frac{1}{2}kx^2} \qquad (3.15)$$

Relația (3.15) este valabilă și când corpul este împins spre stânga, adică resortul este comprimat.

În cazul în care resortul trece din starea "întins" în starea "relaxat" (fig. 3.14):

$$\vec{F}_e = -k\vec{x} = +k\vec{x}'$$

Lucrul mecanic al forței elastice este:

$$\boxed{L_e = +\frac{1}{2}kx^2} \qquad (3.15')$$

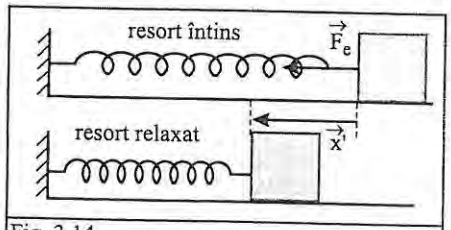


Fig. 3.14

În concluzie:
$L_e < 0$, când resortul se deformează (destinde sau comprimă) și $L_e > 0$, când resortul trece din starea de resort deformat în starea de resort "relaxat".

În cazurile analizate, deplasarea punctului de aplicație al forței elastice se face în lungul resortului.
Cât este lucrul mecanic în cazul în care resortul se deplasează pe alte direcții?

În cazul în care corpul legat de resort se deplasează pe un arc de cerc, lungimea resortului este constantă în timpul deplasării, deci starea lui de deformare *nu se modifică* (fig. 3.15).

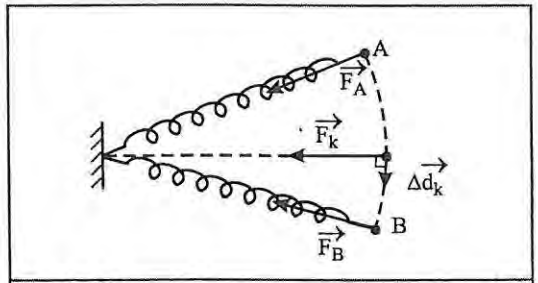


Fig. 3.15

Lucrul mecanic al forței elastice în timpul deplasării elementare $\Delta\vec{d}_k$ este:

$$\Delta L_k = \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{d}_k = F_k \cdot |\Delta\vec{d}_k| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Lucrul mecanic total este: $L_{AB} = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = 0$

(n este numărul de porțiuni foarte mici în care este împărțit arcul AB).

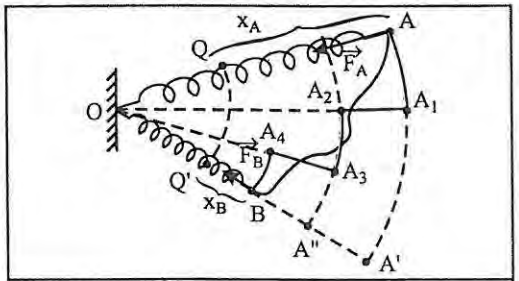


Fig. 3.16

În general, când traiectoria corpului prins de resort este curbilinie oarecare (fig. 3.16) putem să o aproximăm printr-o succesiune de arce (AA_1, A_2A_3, A_4B) alternând cu porțiuni radiale (A_1A_2, A_3A_4):

$$L_{AA_1} = L_{A_2A_3} = L_{A_4B} = 0 \Rightarrow L_{AB} = L_{A_1A_2} + L_{A_3A_4} = L_{A'A''} + L_{A''B} \qquad (3.16)$$

Relația (3.16) este corectă deoarece $A_1A_2 = A'A''$ și $A_3A_4 = A''B$, iar forța elastică variază liniar între aceleași limite.

Exemplu: $F_e(A_1) = F_e(A')$ și $F_e(A_2) = F_e(A_3) = F_e(A'')$

Q și Q' sunt pozițiile în care resortul ar fi în starea "relaxat", iar x_A – deformarea

(alungirea) resortului în starea inițială, respectiv x_B – deformarea resortului în starea finală. În acest caz lucrul mecanic al forței elastice este:

$$\Rightarrow L_{AB} = L_{A'B} = L_{A'Q'} - L_{BQ'} = \frac{k}{2}x_A^2 - \frac{k}{2}x_B^2$$

deci:

$$\boxed{L_{e,AB} = \frac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2) = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)} \qquad (3.17)$$

În concluzie:
Lucrul mecanic al forței elastice nu depinde de forma traiectoriei pe care o urmează punctul material legat de un capăt al resortului (firului elastic), ci doar de pozițiile inițială și finală ale acestuia. Forța elastică este forță conservativă.

3.1.6 LUCRUL MECANIC AL FORȚEI DE FRECARE LA ALUNECARE

Un corp alunecă pe o suprafață plană orizontală cu frecare (fig.3.17).
Conform legii a II-a a frecării:

$$F_f = \mu N$$

rezultă:
$L_f = \vec{F}_f \cdot \vec{d} = F_f \cdot d \cdot \cos 180° = -F_f \cdot d = -\mu N d$
Valoarea lui $\vec{N}$ depinde de $\vec{G}$ și $\vec{F}$: $N = G - F\sin\alpha$

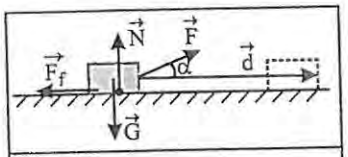


Fig. 3.17

Dacă $\vec{G}$ și $\vec{F}$ sunt constante, lucrul mecanic al forței de frecare este:

$$\boxed{L_f = -\mu(mg - F\sin\alpha)d} \qquad (3.18)$$

Dacă $\alpha = 0, \sin\alpha = 0 \Rightarrow$ $\boxed{L_f = -\mu mgd}$ (3.19)

Lucrul mecanic al forței de frecare este negativ, forța de frecare acționând ca o forță rezistentă.

În exemplul următor, forța de frecare acționează ca o forță activă (de tracțiune).

Corpul de masă m se află pe scândura de masă M (fig.3.18). Între m și M este frecare de coeficient μ, iar între M și suprafața orizontală (de exemplu, gheață) frecarea este neglijabilă.
Dacă tragem de corpul m cu o forță suficient de mare, el va aluneca față de M, dar și M se va deplasa pe suprafața orizontală. Ce forță produce deplasarea scândurii M?

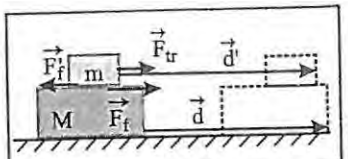


Fig. 3.18

Forța care produce deplasarea, în acest caz, este $\vec{F}_f$, forța de frecare la alunecare cu care corpul m acționează asupra corpului M.
Lucrul mecanic al forței de frecare este:

$$L_f = \vec{F}_f \cdot \vec{d} = F_f \cdot d \cdot \cos 0° = \mu N d = \mu mgd > 0$$

Conform principiului al III-lea al mecanicii există o forță de frecare la alunecare, $\vec{F}'_f$ cu care M acționează asupra lui m. Lucrul mecanic al acestei forțe este:

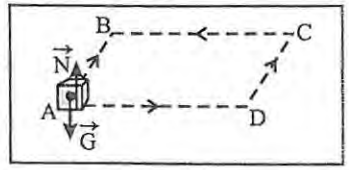
$$L'_f = -\mu mgd' < 0$$

$$d' \neq d \Rightarrow |L'_f| \neq L_f$$

În figura 3.18 am reprezentat doar forțele orizontale care acționează asupra corpului. Reprezentați forțele care acționează pe direcție verticală și scrieți relațiile care există între ele. Ce valoare are lucrul mecanic al fiecărei forțe?

Lucrul mecanic al forței de frecare la alunecare depinde de drumul urmat de punctul material între două puncte.

Exemplu:
Cubul de masă m poate aluneca din A în B, direct sau pe traseul ADCB (AB = BC = CD = AD = ℓ) ca în figura alăturată.



$$L_{f,AB} = -\mu N\ell, \quad L_{f,ADCB} = -3\mu N\ell$$

În concluzie: *forța de frecare este forță neconservativă.*

PROBLEME

1

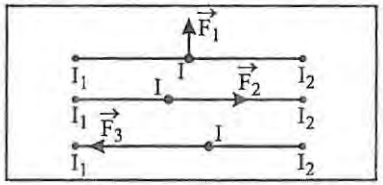
Punctul de aplicație A al unei forțe $\vec{F}$ se deplasează din A_1 în A_2 pe o distanță d. Enumerați trei condiții necesare pentru a calcula lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ prin relația: $L_{1\to 2}(\vec{F}) = F \cdot d$

2

Puterea unei forțe ce acționează asupra unui corp timp de un minut este P = = 120W. Calculați lucrul mecanic al acestei forțe.

3

În fiecare din situațiile reprezentate în figură, punctul de aplicație (I) al forței constante exercitate asupra unui corp se deplasează de la I_1 la I_2 cu viteza de 20 cm/s timp de 1 minut.
Se cunosc: F_1 = 10 N; F_2 = 100 N; F_3 = 200 N.
Calculați lucrul mecanic și puterea mecanică a fiecărei forțe.



4

Un muncitor trage o ladă cu masa m = = 50 kg pe o suprafață orizontală acționând cu o forță F = 200 N care formea-

ză un unghi α ($\cos\alpha = 0{,}8$) cu orizontala. Dacă lada se deplasează cu viteza constantă $v = 1$ m/s ($g = 10$ m/s^2) aflați:

a) coeficientul de frecare la alunecare dintre ladă și suprafața orizontală;

b) lucrul mecanic al forței de frecare și al forței de tracțiune în $t = 1$ min;

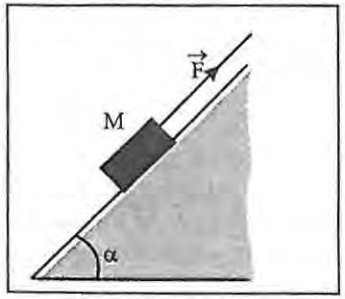
c) puterea dezvoltată de muncitor.

5 E

Un om cu masa $m = 80$ kg se află într-un lift ce urcă cu accelerația $a = 1$ m/s^2. Să se afle lucrul mecanic al greutății omului și lucrul mecanic al reacțiunii normale (a podelei asupra omului) în primele 2 s de la pornirea liftului. ($g = 10$ m/s^2)

6

Un corp cu masa $M = 5$ kg este deplasat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$. Trăgând cu o forță $\vec{F}$, prin intermediul unui fir ideal, corpul se mișcă cu viteza constantă $v = 9$ km/h. Timp de un minut coboară și apoi urcă timp de un minut. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}1$.



Determinați, atât în timpul coborârii cât și al urcării:

a) forțele ce acționează asupra corpului;

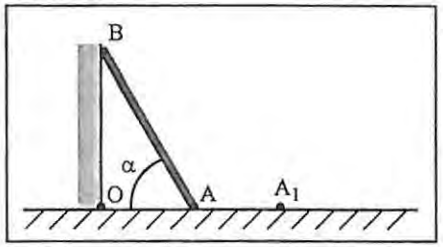
b) lucrul mecanic al forței $\vec{F}$;

c) lucrul mecanic al forței de frecare.

7

O scară cu lungimea $L = 5$ m și masa $M = 20$ kg este sprijinită ca în figură, formând inițial unghiul $\alpha = 60°$. Contactul din B se consideră fără frecare, iar forța de frecare dintre scară și sol se consideră $f = 40$ N.

Scara alunecă pe perete, capătul superior ajungând în O.



Determinați lucrul mecanic al tuturor forțelor în timpul mișcării.

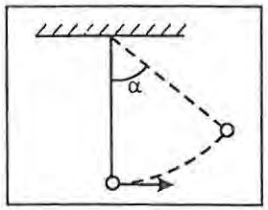
8

Un autoturism Dacia 1310 având puterea maximă a motorului $P_m = 40$ kW rulează pe o șosea cu viteza constantă $v = 72$ km/h.

Considerând că motorul lucrează efectiv doar cu jumătate din puterea sa maximă, să se afle forța totală de rezistență întâmpinată de autoturism la înaintare și lucrul mecanic efectuat pe o distanță $d = 200$ km.

9

Bila pendulului reprezentat în figură are masa $m = 100$ g.



Lovind bila, ea se deplasează până când firul de lungime $\ell = 1$ m face cu verticala unghiul $\alpha = 60°$ și bila se oprește.

Să se calculeze lucrurile mecanice efectuate de greutatea corpului și de tensiunea în fir.

Se consideră $g = 9{,}8$ m/s^2.

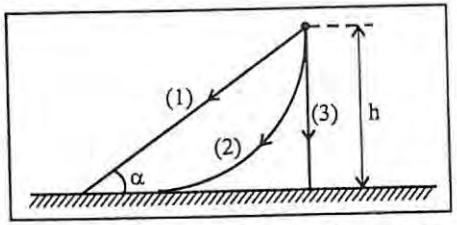
10

Trei corpuri de masă m, fiecare, coboară pe trei trasee diferite:

(1) – o dreaptă oblică;

(2) – un sfert de cerc;

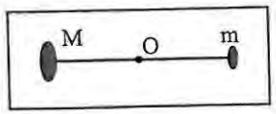
(3) – o dreaptă verticală.



Ce lucru mecanic efectuează greutatea fiecărui corp?

11

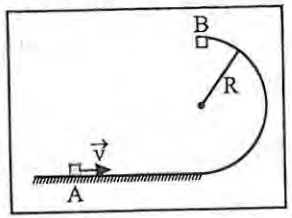
Haltera din figură, aflată în poziție orizontală, se poate roti în plan vertical în jurul punctului fix O situat la mijlocul ei.



Dacă lungimea halterei este 2a, ce lucru mecanic efectuează greutățile celor două discuri, de masă M, respectiv m, până când haltera ajunge în poziție verticală? Se neglijează masa tijei.

12

Un corp mic, de masă m, este lansat pe suprafața orizontală din punctul A și pătrunde în interiorul unui semicilindru, de rază R, ajungând până în B (la partea superioară a acestuia).



Ce lucru mecanic efectuează greutatea corpului când acesta se deplasează din punctul A în punctul B?

13 E

Pentru a întinde un resort (inițial nedeformat) cu $\Delta\ell_1$ se efectuează un lucru mecanic $L_1 = 10$ J.

Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a continua întinderea resortului cu încă $\Delta\ell_1$?

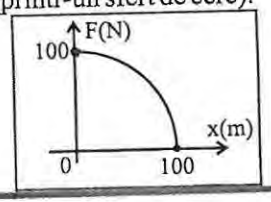
14 E

Pentru a încărca un pistol-jucărie un copil comprimă resortul pistolului pe distanța $x = 5$ cm cu o forță (maximă) $F_m = 20$ N.

Să se afle lucrul mecanic efectuat de forța exercitată de resort asupra bilei, care este împinsă în pistol.

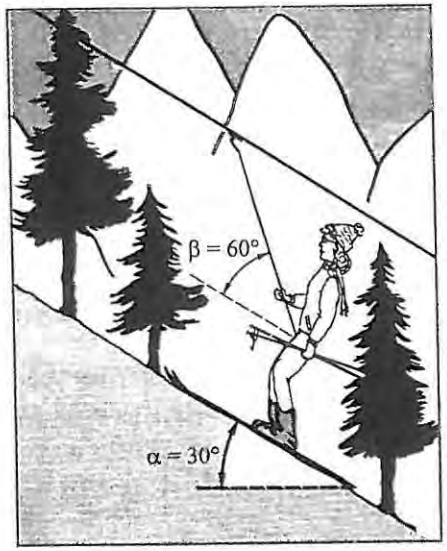
15

Sub acțiunea unei forțe un punct material se mișcă rectiliniu în sensul forței. Să se afle valoarea medie a forței a cărei variație este reprezentată în figură (printr-un sfert de cerc).



16

Un schior cu greutatea 800 N este urcat cu viteza constantă de 10,8 km/h cu ajutorul unui cablu care formează un unghi $\beta = 60°$ cu solul (ca în figura de mai jos).



Cunoscând unghiul pantei $\alpha = 30°$ şi considerând forţele de frecare $F_f = 50$ N, calculaţi:

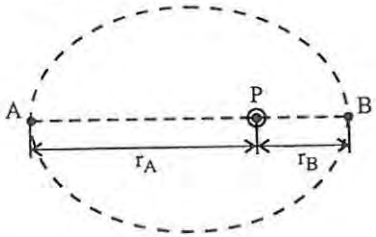
a) valoarea tensiunii (T) cu care este tras schiorul;

b) puterea dezvoltată de această forţă;

c) lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{T}$ în timp ce schiorul este ridicat la înălţimea de 2 m.

17

Traiectoria Lunii în jurul Pământului este o elipsă. Astfel, distanţa minimă dintre Pământ şi Lună este, pe traiectoria descrisă, $r_B = 363\,300$ km, iar cea maximă este $r_A = 405\,500$ km. Considerând Luna punctiformă, raza terestră R = 6 370 km şi acceleraţia gravitaţională la suprafaţa Pământului $g_0 = 9{,}8$ m/s^2, să se afle lucrul mecanic efectuat de forţa exercitată de Pământ asupra Lunii ($m = 7{,}37 \cdot 10^{22}$ kg) la deplasarea ei din A în B.



18

Un planor de masă m = 1,5 t coboară rectiliniu uniform pe un traseu oblic AB ce face cu orizontala unghiul α (pentru care $\sin\alpha = 0{,}1$). Dacă AB = 4 km şi $g = 10$ m/s^2, să se afle lucrul mecanic efectuat de rezultanta tuturor forţelor cu care aerul atmosferic acţionează asupra planorului.

19

O macara transportă rectiliniu un corp de masă m = 2 t pe direcţia oblică, în sus, la distanţa d = 20 m sub unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Considerând plecarea corpului din repaus, cu accelerația constantă $a = 0{,}5$ m/s^2, frecările cu aerul neglijabile şi $g = 10$ m/s^2, să se afle:

a) forţa de tracţiune a macaralei;

b) lucrul mecanic efectuat de forţa de tracţiune a macaralei;

c) puterea medie dezvoltată de macara.

3.2 TEOREMA VARIAŢIEI ENERGIEI CINETICE A PUNCTULUI MATERIAL

3.2.1 ENERGIA MECANICĂ

Auzim deseori expresii precum: "trebuie să facem economie de *energie*"; "este criză de *energie*" etc. Cuvântul energie provine din cuvântul grecesc "*energheia*" care înseamnă "activitate".

- În locuinţele noastre toate aparatele de uz casnic consumă *energie electrică*.
- În timpul iernii caloriferele consumă *energie termică* pentru a încălzi locuinţele.
- Unele calculatoare de buzunar funcţionează folosind *energie luminoasă*. Chiar viaţa pe Pământ este posibilă datorită energiei primită de la Soare.

În unele cazuri vorbim de transformarea energiei dintr-o formă în alta:

- într-o centrală nucleară energia nucleelor atomice (*energia nucleară*) se transformă în *energie termică* şi apoi în *energie electrică;*
- macaraua unui pod rulant (fig. 3.19) "consumă" energie electrică pentru a ridica şi a deplasa containere a căror masă poate atinge câteva zeci de tone. Containerele ridicate "capătă" astfel energie, numită *energie mecanică*.

Fig. 3.19

Fig. 3.20

Schiorul poate străbate pârtiile de zăpadă după ce a urcat cu teleschiul (fig. 3.20). În vârful pantei el are energie mecanică numită *energie potenţială*. În timpul coborârii energia potenţială scade, în timp ce viteza schiorului creşte. La fiecare valoare a vitezei, schiorul are energie mecanică numită *energie cinetică*.

Energia cinetică şi energia potenţială sunt două forme ale energiei mecanice a unui corp. Consultând un dicţionar citim la cuvântul "energie": *energia este capacitatea de a furniza un lucru*, urmat de o listă cu diferite forme de energie. Putem spune că un sistem posedă energie dacă este capabil să producă transformări precum:

- creşterea temperaturii unui corp;
- aprinderea unui bec;
- punerea unui corp în mişcare etc.

Energia unui sistem este o mărime (funcţie) *de stare*, adică putem vorbi de energia sistemului în starea A (E_A), sau în starea B (E_B).La trecerea sistemului din starea A în starea B energia variază cu $\Delta E_{AB} = E_B - E_A$.
Energia unui sistem variază numai în urma unei interacţiuni.

În procesul de trecere din starea A în starea B, forţa efectuează lucru mecanic,deci *lucrul mecanic este o mărime de proces* (de transformare).

Proprietăţii unui sistem de a fi capabil să exercite forţe care efectuează lucru mecanic îi asociem mărimea fizică numită energie mecanică.

Exemplu: putem vorbi despre lucrul mecanic efectuat de forţa de atracţie a Pământului, prin câmpul său gravitaţional, la deplasarea unui corp din punctul A în punctul B:

$$L_{G_{AB}} = mg(h_A - h_B)$$

Există deci, o legătură între energie şi lucru mecanic, mai precis între variaţia energiei şi lucrul mecanic efectuat la trecerea dintr-o stare în alta.

Exemplu: lucrul mecanic efectuat de forţa de tracţiune a unei locomotive electrice pentru deplasarea unui tren este cu atât mai mare cu cât energia consumată este mai mare. Putem spune că energia electrică este transformată în energie mecanică şi conduce la efectuarea de lucru mecanic.
Energia este *mărime de stare*, iar lucrul mecanic este *mărime de proces* ele având aceeaşi unitate de măsură în S.I.: $[E]_{S.I.} = [L]_{S.I.} = J$ (joule)
Energia mecanică are două componente: cinetică şi potenţială.

3.2.2 ENERGIA CINETICĂ

Lucraţi în grup.
Un corp C, aşezat pe o suprafaţă orizontală, este legat printr-un fir trecut peste un scripete de un alt corp M (fig. 3.21). Când corpul M este lăsat liber, el pune în mişcare şi corpul C, a cărui viteză creşte progresiv. Puneţi un alt corp (de exemplu o minge de ping-pong) pe direcţia de mişcare a corpului C. Verificaţi, printr-un alt experiment, că mingea de ping-pong se va mişca în momentul lovirii.

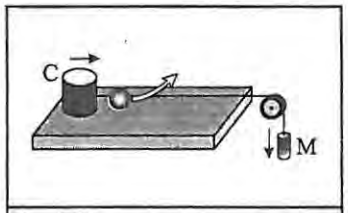


Fig. 3.21

Explicaţia este că, atunci când corpul C este în mişcare cu viteza $\vec{v}$ posedă energie şi este capabil să pună în mişcare un alt corp (mingea de ping-pong). Această energie se manifestă numai atunci când corpul C este în mişcare şi o numim *energie cinetică*.
În limba greacă cuvântul "*kineticos*" înseamnă *mişcător*.
• O apă curgătoare are energie cinetică şi poate pune în mişcare o moară, un generator electric etc.

• Vântul (aer în mişcare) poate acţiona o elice, care rotindu-se, acţionează un generator electric, o moară etc.
Orice punct material (corp) de masă m aflat în mişcare cu viteza $\vec{v}$ faţă de un sistem de referinţă inerţial are o energie cinetică E_c. *Energia* sa *cinetică* se calculează cu relaţia:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (3.20)$$

Un punct material de masă m se mişcă sub acţiunea unor forţe a căror rezultantă este $\vec{F}$ (fig.3.22). Forţa $\vec{F}$:
– imprimă corpului accelerația $\vec{a}$ (pe direcţia mişcării),
– efectuează pe distanţa d lucrul mecanic:

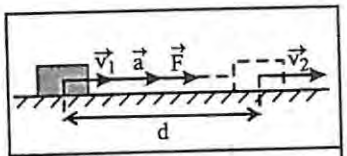


Fig. 3.22

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos 0° = F \cdot d$$

şi modifică viteza punctului material de la valoarea iniţială v_1 la valoarea finală v_2.
Aplicând principiul fundamental al mecanicii rezultă:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$
$$m \cdot a = F$$

înmulţind ultima relaţie cu $d = v_m \cdot \Delta t$, unde $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$ rezultă:

$$m \cdot a \cdot d = F \cdot d \Leftrightarrow m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot v_m \cdot \Delta t = L$$

Deci: $$m(v_2 - v_1)\frac{v_1 + v_2}{2} = L \Rightarrow \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = L \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L$$

Astfel, prin lucrul mecanic efectuat, forţa rezultantă $\vec{F}$ a produs variaţia mărimii $E_c = \frac{mv^2}{2}$ (numită **energie cinetică**) de la $E_{c1} = \frac{mv_1^2}{2}$ la $E_{c2} = \frac{mv_2^2}{2}$

$$\boxed{\Delta E_c = L} \qquad (3.21)$$

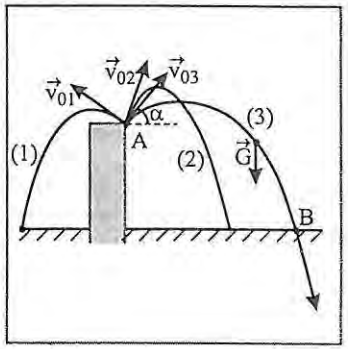
Relaţia (3.21) exprimă matematic **teorema** (legea) **variaţiei energiei cinetice** pentru un punct material:
La deplasarea unui punct material faţă de un sistem de referinţă inerţial, variaţia energiei lui cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra acestuia.

Observaţii:
➢ Dacă $L > 0$, energia cinetică, deci şi viteza cresc.
➢ Dacă $L < 0$, energia cinetică, deci şi viteza scad.
➢ Depinzând de viteză, energia cinetică depinde de sistemul de referinţă ales.

Exemplu:
Un călător cu masa de 80 kg se află într-un tren care se deplasează rectiliniu uniform față de gară cu viteza v = 20 m/s. Față de vagonul în care se află, energia lui cinetică este nulă (considerând că el este așezat, în repaus față de vagon), iar față de gară, are energia cinetică 16 000 J.

Aplicarea teoremei variației energiei cinetice în rezolvarea problemelor de mecanică conduce la calcule simple.

Exemplu:
Din vârful unui turn de înălțime h sunt aruncate, în mai multe direcții, cu viteze egale ca modul, mai multe corpuri de mase *diferite*. Care dintre corpuri ajunge la sol cu o viteză mai mare?



$$v_{01} = v_{02} = v_{03} = v_0$$

Aplicăm teorema variației energiei cinetice pentru unul dintre corpuri, de exemplu, pentru cel care urmează traiectoria (3):

$$\Delta E_c = L;\ E_{c_B} - E_{c_A} = L_G$$

Neglijând frecarea cu aerul, singura forță care acționează asupra corpului este greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, care este o forță conservativă $\Rightarrow L_G = mgh$.

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Leftrightarrow \frac{m}{2}(v_B^2 - v_0^2) = m \cdot g \cdot h$$

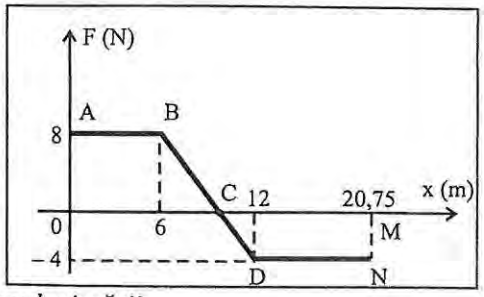
$$v_B^2 = v_0^2 + 2gh \quad \text{sau} \quad v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Observăm că viteza la sol nu depinde nici de masa corpului, nici de unghiul α (deci nu depinde de direcția de aruncare). Dacă vitezele de lansare au modulele egale, corpurile ajung la sol cu aceeași viteză (în modul).
Problema ar putea fi rezolvată și aplicând legile aruncărilor în câmp gravitațional uniform, dar cu calcule laborioase.

Probleme rezolvate

1

Asupra unui corp cu masa m = 2 kg, *aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, acționează o forță (rezultantă) orizontală care variază cu distanța parcursă (coordonata) ca în figură. Acțiunea forței încetează după ce corpul parcurge* $x_1 = 20{,}75$ m.



Calculați:
a) viteza maximă atinsă de corp în timpul mișcării;
b) viteza după parcurgerea distanței x_1*;*
c) valoarea medie a forței pe distanța x_1.

Rezolvare:

a) Pe distanța OC = 10 m, forța este pozitivă și acționează ca forță activă, de tracțiune, mărind viteza corpului, care va fi maximă în punctul C de coordonată (abscisă) x = 10m.

Aplicăm teorema variației energiei cinetice:

$\Delta E_c = L_{OC};\ L_{OC} = A_{tr.OABC}$ numeric $L_{OC} = 64$ J

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{tr.OABC};\quad v_C = \sqrt{\frac{2}{m}A_{tr.OABC}};\quad \text{numeric}\quad v_C = 8\ \frac{m}{s}$$

b) Pe porțiunea următoare CM = 20,75 m – 10 m = 10,75 m forța este negativă, acționează ca forță de frecare și efectuează lucru mecanic negativ:

$L_{CM} = -A_{tr.CMND}$ numeric: $L_{CM} = -39$ J
$L_{total} = L_{OC} + L_{CM}$ numeric: $L_{total} = 25$ J

Aplicăm acum teorema variației energiei cinetice pentru întreaga distanță OM:

$$\Delta E_c = L_{OM}$$

unde: $L_{OM} = L_{OC} + L_{CM}$ și $\Delta E_c = \frac{mv_M^2}{2} - 0$

rezultă: $\frac{mv_M^2}{2} = L_{OM}$ $\quad v_M = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot L_{OM}}$ $\quad$ numeric: $v_M = 5$ m/s

c) Exprimăm lucrul mecanic total:

$$L_{total} = L_{OM} = F_m \Delta x = F_m (x_m - 0) \Rightarrow F_m = \frac{L_{OM}}{x_M}; \quad \text{numeric} \quad F_m \approx 1{,}2 \text{ N}$$

2

O săniuță de masă m *coboară plecând din repaus pe un plan înclinat, ce continuă (după un racord curb) cu un plan orizontal, oprindu-se pe acesta. Cunoscând înălțimea planului înclinat* h, *să se afle lucrul mecanic ce trebuie efectuat pentru a aduce săniuța înapoi în vârful planului cu viteză constantă. Se neglijează frecarea cu aerul și se consideră forța de tracțiune paralelă cu viteza.*

Rezolvare:

Enunțul problemei nu precizează nimic despre forța de frecare cu solul și nici despre coeficientul de frecare. Putem să considerăm de exemplu că sunt variabile.

Dacă B este punctul în care se oprește corpul, aplicăm teorema variației energiei cinetice pentru mișcarea din A până în B:

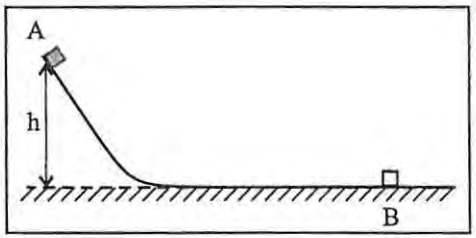
$\Delta E_c = L$

$E_{CB} - E_{CA} = L_G + L_N + L_{F_f}$

$E_{CB} = E_{CA} = 0$ pentru că $v_B = v_A = 0$

$L_N = 0$ deoarece $\vec{N} \perp \vec{v}$ (permanent)

$L_{F_f} = -L_G = -mgh$



Când corpul se va întoarce din B în A, va acționa în plus forța de tracțiune, al cărei lucru mecanic trebuie aflat:

$$\Delta E'_c = L'$$

$$E'_{CA} - E'_{CB} = L'_G + L'_N + L'_{F_f} + L_{F_t}$$

Dar, $E'_{CA} = E'_{CB}$ deoarece $v'_A = v'_B$ (mișcarea la întoarcere este uniformă: $v' = \text{const.}$)

De asemenea: $L'_N = 0 \, (\vec{N}' \perp \vec{v}')$

$$L_{F_t} = -L'_G - L'_{F_f} = L_G - L_{F_f} = mgh - (-mgh) = 2mgh$$

Am considerat că la întoarcere săniuța trece prin aceleași puncte ca și la ducere (din A spre B) și astfel: $L'_{F_f} = L_{F_f} = -mgh$

F_f acționează în ambele situații ca forță rezistentă.

PROBLEME

1

Să se deducă, aplicând teorema variației energiei cinetice, înălțimea maximă atinsă de un corp aruncat vertical în sus (neglijând frecările cu aerul) și distanța maximă parcursă de un corp lansat pe o suprafață orizontală cu frecare de coeficient μ.

2

Pe un plan înclinat (de unghi $\alpha = 30°$) coboară, plecând din repaus, un corp care ajunge la baza planului cu viteza $v = 8$ m/s. Dacă înălțimea planului este $h = 5$ m, să se afle coeficientul de frecare la alunecare. Se neglijează frecările corpului cu aerul.

3

O minge, cu masa $m = 500$ g, a fost aruncată vertical, în sus, cu viteza $v_0 = 12$ m/s și a urcat la înălțimea maximă $h_m = 5$ m. Cu ce forță medie a acționat aerul atmosferic asupra mingii? Se consideră $g = 10$ m/s^2.

4

Un fir cu lungimea $\ell = 1$ m, fixat la un capăt superior, are la capătul inferior o mică bilă în repaus. Printr-o lovitură se imprimă bilei viteza orizontală $v_0 = 3{,}16$ m/s.
Ce unghi face firul cu verticala când bila se oprește, dacă $g = 10$ m/s^2?

5

Un glonț străpunge vertical, de jos în sus o scândură de grosime $h = 10$ cm intrând cu viteza $v_0 = 300$ m/s și ieșind cu $v = 100$ m/s. Dacă masa glonțului este $m = 20$ g și $g = 10$ m/s^2, să se afle forța medie de rezistență întâmpinată de glonț din partea scândurii.

6

Din vârful unei emisfere alunecă pornind din repaus, fără frecări, un corp mic. Dacă raza emisferei este $R = 3$ m, să se afle la ce înălțime se desprinde corpul de emisferă.

TEST

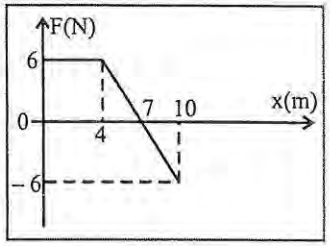
1

Alegeți exprimările corecte și reformulați-le pe cele incorecte:

a) Lucrul mecanic și puterea sunt mărimi scalare.
b) $[L]_{S.I.} = J$, $[P]_{S.I.} = W$.
c) Lucrul mecanic al greutății este totdeauna pozitiv.
d) Relația de definiție a puterii medii este $P_m = L \cdot t$.
e) Forța de frecare poate efectua și lucru mecanic pozitiv. 1p

II

Asupra unui corp, care se deplasează rectiliniu, acționează, pe direcția deplasării, forța a cărei variație este reprezentată în grafic.



1) Lucrul mecanic efectuat de forță la deplasarea corpului între punctele de abscise $x_1 = 0$ și $x_2 = 10$ m este:

a) 20 J b) 18 J c) 24 J d) 42 J e) 30 J

2) Pe distanța Δx = 10 m valoarea medie a forței este:

a) 3,6 N b) 4,8 N c) 1,8 N d) 2,4 N e) 3 N

2p

III

1) Expresia corectă a puterii momentane este:

a) $P = Fv$ b) $P = \vec{F}/\vec{v}$ c) $P = \vec{F} \times \vec{v}$ d) $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

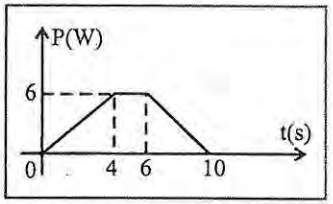
2) Lucrul mecanic al greutății unui corp în câmp gravitațional uniform este:

a) $L_{AB} = \vec{G} \times \vec{d}$ b) $L_{AB} = G \cdot d$ c) $L_{AB} = G(h_A - h_B)$ d) $L_{AB} = mg(h_B - h_A)$

2p

IV

Puterea mecanică a motorașului unei jucării este reprezentată grafic în figura alăturată. Dacă jucăria se deplasează pe o suprafață orizontală fără frecări și forța de tracțiune este orizontală, determinați:



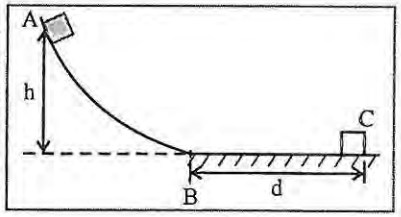
a) lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune în intervalul de timp $\Delta t = 10$ s;

b) ce viteză capătă jucăria de masă m = 2 kg, plecată din repaus, după $\Delta t = 10$ s.

2p

V

Corpul reprezentat în figura alăturată are viteză inițială nulă, coboară fără frecare pe porțiunea curbă de înălțime h și parcurge pe orizontală distanța d până la oprirea în punctul C. Determinați viteza la începutul porțiunii orizontale și coeficientul de frecare la alunecare pe suprafața orizontală.



2p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru 50 minute.

3.3 ENERGIA POTENȚIALĂ

• Apa reținută de baraj într-un lac de acumulare, prin cădere de la o anumită înălțime, datorită greutății sale, efectuează lucru mecanic punând în mișcare de rotație alternatorul unei hidrocentrale.

• Un ciocan aflat la înălțimea h față de un cui, prin cădere, datorită greutății sale, efectuează lucru mecanic și poate înfige cuiul într-o scândură (fig. 3.23).

• Resortul comprimat al unui pistol jucărie, atunci când se destinde, exercită asupra săgeții o forță care efectuează lucru mecanic (fig. 3.24). În timpul destinderii, pozițiile spirelor una față de alta, se modifică.

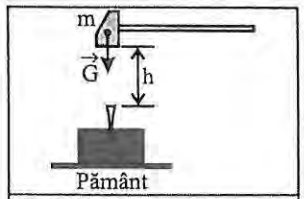


Fig. 3.23

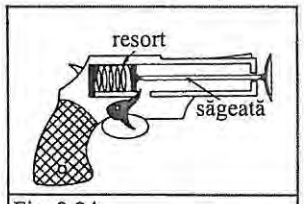


Fig. 3.24

În aceste exemple de sisteme *se schimbă poziția relativă a părților lor componente* (a ciocanului și apei față de Pământ, a spirelor resortului unele față de altele) și interacționând exercită forțe capabile să efectueze lucru mecanic. Spunem în acest caz că sistemul posedă energie mecanică numită *energie potențială* (de poziție sau de interacțiune).

Sistemele deformabile (cele ale căror părți își schimbă în timp poziția relativă) au energie potențială dacă părțile lor interacționează prin forțe conservative.

3.3.1 ENERGIA POTENȚIALĂ GRAVITAȚIONALĂ

Nu putem vorbi despre energia potențială a unui singur punct material (corp) izolat (care nu interacționează cu un alt corp). Pentru a simplifica exprimarea vom spune de aici înainte "energia potențială gravitațională a corpului de masă m" și vom subînțelege că este vorba de energia potențială datorată interacțiunii gravitaționale a corpului (punctului material) cu Pământul.

Fiecărei stări a sistemului îi corespunde o energie potențială E_p, iar modificarea configurației sistemului determină variația energiei potențiale.

Vom deduce expresia acestei energii observând că ea *crește* atunci când ridicăm un punct material de masă m din punctul A, aflat la înălțimea h_A, până în punctul B, aflat la înălțimea h_B și *scade* când corpul coboară din B în A.

În cazul coborârii din B în A (fig. 3.25) *scăderea* energiei potențiale va fi regăsită în lucrul mecanic al greutății (forță conservativă):

$$\boxed{\Delta E_p = -L_G} \qquad (3.22)$$

$$E_{p_A} - E_{p_B} = -mg(h_B - h_A)$$

$$E_{p_A} - E_{p_B} = mgh_A - mgh_B$$

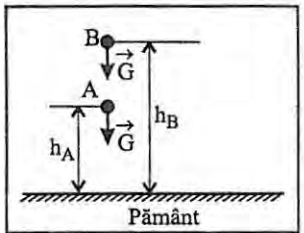


Fig. 3.25

Energiile potențiale în stările A și B se pot scrie:

$$E_{p_A} = mgh_A + E_{p_0}$$

$$E_{p_B} = mgh_B + E_{p_0}$$

sau, în general:

$$\boxed{E_p(h) = mgh + E_{p_0}} \qquad (3.23)$$

Pentru h = 0, relația (3.23) devine $E_p(0) = E_{p_0}$, adică constanta E_{p_0} care inițial a fost inclusă arbitrar în expresia energiei potențiale, reprezintă valoarea pe care o are energia potențială de interacțiune a sistemului corp de masă m – Pământ, când corpul se află pe suprafața Pământului (sau nivelul convențial h = 0).
Valoarea lui E_{p_0} poate fi oricât de mare sau oricât de mică, dar această valoare *nu* este importantă pentru că în desfășurarea unui fenomen contează doar variația energiei potențiale la trecerea dintr-o stare în alta, iar aceasta nu depinde de valoarea atribuită constantei E_{p_0}. Pentru simplitate putem *conveni* că: $E_{p_0} = 0$.

$$\boxed{E_p(h) = m \cdot g \cdot h} \qquad (3.24)$$

Relația (3.24) este conformă cu prezicerile noastre privind dependența de înălțime în cazul în care $\vec{g} = \overrightarrow{const.}$ (câmp gravitațional uniform).
În cazul unui câmp gravitațional *neuniform*, putem deduce o relație corectă pentru energia potențială dacă folosim relația (3.22) completată cu expresia lucrului mecanic L_G pentru câmpul gravitațional neuniform radial (relația 3.13):

$$\Delta E_p = -L_G$$

$$L_G = kMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

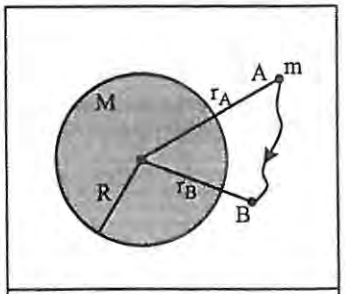


Fig. 3.26

Rezultă:

$$E_{p_B} - E_{p_A} = -kMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$E_{p_B} - E_{p_A} = -k\frac{Mm}{r_B} - \left(-k\frac{Mm}{r_A}\right)$$

Deducem:

$$E_{p_B} = -k\frac{Mm}{r_B} + E_{p_0}; \quad E_{p_A} = -k\frac{Mm}{r_A} + E_{p_0}$$

sau în general:

$$\boxed{E_p(r) = -k\frac{Mm}{r} + E_{p_0}} \qquad (3.25)$$

Pentru a găsi o semnificație fizică constantei E_{p_0}, evaluăm care ar fi valoarea energiei potențiale E_p, pentru cazul $r \to \infty$. În acest caz E_{p_0}, ar reprezenta energia potențială de interacțiune a Pământului (de masă M) cu corpul de masă m când acestea s-ar afla la o distanță foarte mare de Pământ (teoretic infinită). În această situație forța de interacțiune este nulă și atunci putem considera $E_{p_0} = 0$, iar relația (3.25) devine:

$$\boxed{E_p(r) = -k\frac{Mm}{r} = -mg_0\frac{R^2}{r}} \qquad (3.26)$$

Observație:

➢ Relațiile (3.25) și (3.26) sunt corecte numai pentru $r \geq R$.
Semnul (–) din relația (3.26) este important deoarece stabilește o concordanță cu relația (3.24), în sensul că, ambele arată că E_p crește când r (respectiv h) crește.

3.3.2 ENERGIA POTENȚIALĂ ELASTICĂ (extindere)

Lucrul mecanic al forței elastice se calculează cu relația:

$$L_{e,AB} = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

independent de forma traiectoriei punctului material între punctele A și B.
Se poate considera că relația $\Delta E_p = -L_{cons}$ exprimă matematic indirect energia potențială a oricărui sistem fizic. O vom folosi și pentru a deduce expresia energiei potențiale elastice (adică a unui fir sau resort deformat elastic).

$$E_{p_B} - E_{p_A} = -\frac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2)$$

$$E_{p_B} - E_{p_A} = \frac{k}{2}x_B^2 - \frac{k}{2}x_A^2$$

Deducem că: $E_{p_B} = \frac{k}{2}x_B^2 + E_{p_0}$; $E_{p_A} = \frac{k}{2}x_A^2 + E_{p_0}$

În general: $\boxed{E_p(x) = \frac{k}{2}x^2 + E_{p_0}}$

unde x reprezintă deformarea resortului (alungirea sau comprimarea), iar k constanta elastică a resortului.

În cazul resortului nedeformat (relaxat) considerăm $E_p(0) = E_{p_0}$, adică constanta E_{p_0} introdusă inițial arbitrar în expresia energiei potențiale elastice ar reprezenta valoarea energiei pe care o are resortul *nedeformat*. Ea poate avea orice valoare, deci o putem considera nulă și atunci:

$$\boxed{E_{p_e}(x) = k\frac{x^2}{2}} \qquad (3.27)$$

3.4 LEGEA CONSERVĂRII ENERGIEI MECANICE

Energia este *mărime de stare*, iar lucrul mecanic *mărime de proces*, și între ele există legătură. Astfel variațiile de energie ale unui sistem duc la efectuarea de lucru mecanic, deci se regăsesc în lucrul mecanic efectuat de forțe exercitate asupra sistemului.

Să presupunem că între părțile componente ale unui sistem mecanic *izolat* acționează numai forțe *conservative* și datorită acestora starea sistemului și deci *energia cinetică* și *energia potențială* se modifică conform relațiilor:

$$\Delta E_c = L \qquad (3.28)$$

$$\Delta E_p = -L \qquad (3.29)$$

Observație:

Relația (3.29) definește matematic (indirect) funcția (mărimea) de *stare* numită energie potențială pentru *orice* sistem fizic, ale cărui părți *interacționează* prin forțe *conservative*. Dar, de ce neapărat *conservative*?

Între două poziții (stări) diferite A și B, un punct material (corp, sistem) poate să treacă pe drumuri diferite, de exemplu prin I_1 sau I_2 (figura 3.27).

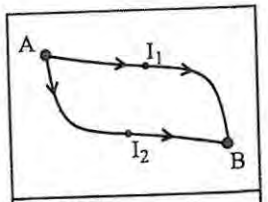


Fig. 3.27

Dacă scriem explicit relația (3.29) obținem:

$$E_{p_B} - E_{p_A} = -L_{AB}$$

care aplicată în cele două situații devine:

$$E_{p_B} - E_{p_A} = -L_{AI_1B} \quad \text{și} \quad E_{p_B} - E_{p_A} = -L_{AI_2B} \qquad (3.30)$$

$$E_{p_B} = E_{p_A} - L_{AI_1B} \quad \text{și} \quad E_{p_B} = E_{p_A} - L_{AI_2B}$$

Deoarece energia este mărime de stare, expresiile (3.30) trebuie să exprime aceeași valoare a energiei potențiale E_{p_B} (nu contează cum ajunge sistemul în starea B). În acest caz trebuie ca $L_{AI_1B} = L_{AI_2B}$, deci *lucrul mecanic nu depinde de "drumul" urmat de punctul material între A și B (lucrul mecanic al unor forțe conservative)*.

Adunând membru cu membru relațiile (3.28) și (3.29) obținem:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Leftrightarrow \Delta(E_c + E_p) = 0$$

Dar: $E_c + E_p = E$

rezultă că: $\Delta E = 0$

adică $\boxed{E = \text{const.}}$ (3.31)

Relația E = const. exprimă **legea conservării energiei mecanice** a unui sistem izolat în interiorul căruia se exercită numai forțe conservative (gravitaționale, elastice etc.):

Energia mecanică totală a unui sistem izolat, între părțile căruia se exercită numai forțe conservative este constantă în timp (se conservă).

Pentru aplicarea corectă a legii conservării energiei mecanice în rezolvarea unor probleme se parcurg următoarele etape:

1°– identificarea sistemului fizic *izolat* căruia urmează să-i aplicăm legea conservării energiei;

2°– reprezentarea printr-un desen a elementelor sistemului și a stărilor importante în evoluția sistemului (cea inițială, finală și dacă este cazul – una sau mai multe stări intermediare);

3°– alegerea nivelului (sau a nivelelor) de referință al energiei potențiale (sau ale energiilor potențiale);

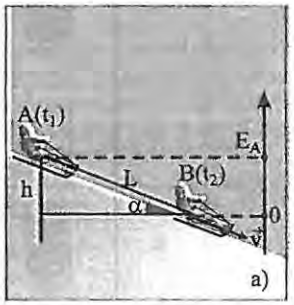
4°– exprimarea energiei mecanice în fiecare stare;

5°– scrierea legii de conservare a energiei și rezolvarea ecuației.

Exemple:

1. Studiul mișcării unui corp fără frecare de-a lungul unui plan înclinat

Un sportiv, aflat pe o săniuță, coboară pe o pârtie, frecarea fiind neglijabilă (fig. a). Viteza inițială a sistemului sportiv-săniuță este nulă. Ce viteză capătă sistemul după ce a coborât pe distanța L?



Rezolvare:

1° Sistemul este ansamblul sportiv-săniuță, aflat în câmpul gravitațional al Pământului. Forțele care acționează sunt greutatea $\vec{G}$ și reacțiunea solului $\vec{N}$ perpendiculară pe direcția de mișcare.

Deoarece mișcarea este fără frecare sistemul este *conservativ*.

2° În figură sunt reprezentate starea inițială $A(t_1)$ și starea finală $B(t_2)$.

3° Alegem nivelul de referință al energiei potențiale orizontala ce trece prin B.

4° Exprimăm energiile corespunzătoare celor două stări:

Stare	Energia cinetică	Energia potențială	Energia mecanică $E = E_c + E_p$
$A(t_1)$	$E_{c_A} = 0$	$E_{p_A} = m \cdot g \cdot h$	$E_A = mgh$
$B(t_2)$	$E_{c_B} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{p_B} = 0$	$E_B = \frac{mv^2}{2}$

5° Aplicăm legea conservării energiei mecanice: $E_A = E_B$, rezultă: $mgh = \frac{mv^2}{2}$

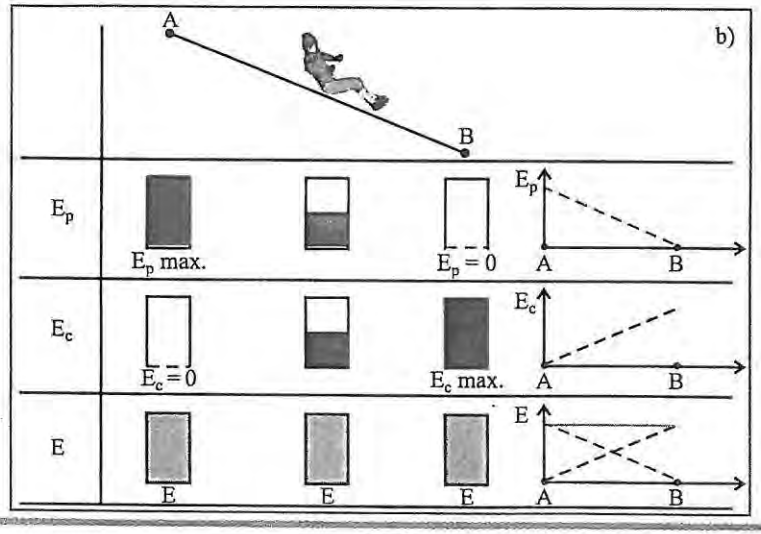
deci: $v^2 = 2gh$

Dar între distanța parcursă L (pe planul înclinat), unghiul planului α și înălțimea lui h este relația: $\sin\alpha = \frac{h}{L}$ sau $h = L\sin\alpha$.

Deci viteza pe care o capătă sistemul după parcurgerea distanței L este:

$$v = \sqrt{2gL\sin\alpha}$$

În figura b) sunt reprezentate transformările de energie: în timpul coborârii sportivului energia potențială se transformă în energie cinetică, *energia mecanică* rămânând *constantă*.



2. Studiul oscilațiilor unui pendul simplu

Pendulul este format dintr-o bilă mică, de masă m (considerată punctiformă), suspendată de un fir ideal de lungime ℓ.

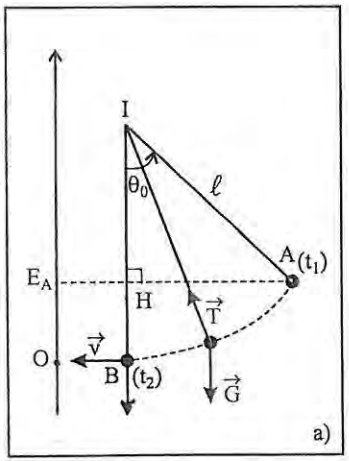
Inițial firul întins al pendulului formează un unghi θ_0 cu direcția verticală, iar bila nu are viteză. Se lasă sistemul liber. Ce viteză are bila când firul pendulului trece prin poziția verticală (se neglijează frecările)?

Rezolvare:

1° Sistemul este format din Pământ, suportul de care este prins firul și bila.

Neglijând frecările, forțele care acționează asupra bilei sunt: greutatea $\vec{G}$ (forță conservativă) și tensiunea în fir $\vec{T}$ (forță pasivă).

Se poate observa în figura a) că vectorul $\vec{T}$ este perpendicular pe viteza punctului său de aplicație ($\vec{v}$), deci sistemul este *conservativ*.



2° În figură sunt reprezentate starea inițială $A(t_1)$ și starea finală $B(t_2)$.

3° Nivelul de referință este orizontala ce trece prin O.

4° Exprimăm energiile corespunzătoare celor două stări.

Stare	Energia cinetică	Energia potențială	Energia mecanică $E = E_c + E_p$
$A(t_1)$	$E_{c_A} = 0$	$E_{p_A} = m \cdot g \cdot h$	$E_A = mgh$
$B(t_2)$	$E_{c_B} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{p_B} = 0$	$E_B = \frac{mv^2}{2}$

5° Aplicăm legea conservării energiei mecanice:

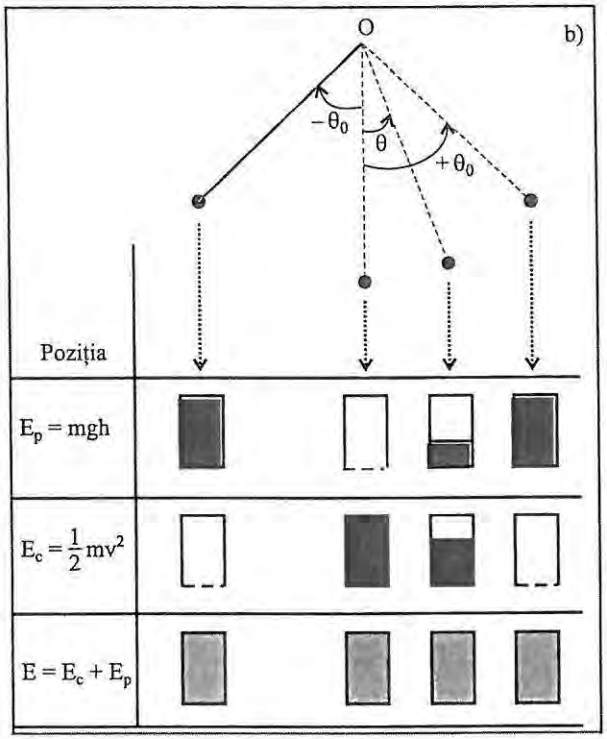
$$E_A = E_B$$

rezultă: $$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

dar: $$h = \ell - IH;\ IH = \ell \cdot \cos\theta_0;\ h = \ell(1 - \cos\theta_0)$$

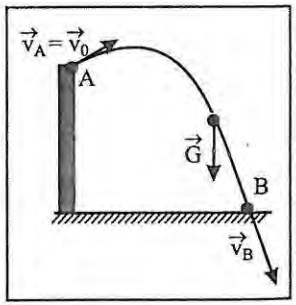
Deci: $$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}$$

În figura b) sunt puse în evidență transformările de energie în timpul mișcării pendulului.
Când pendulul coboară, energia potențială se transformă în energie cinetică, iar când pendulul se ridică, energia cinetică se transformă în energie potențială.



3. Studiul mișcării unui corp aruncat de la o anumită înălțime

Din vârful unui turn de înălțime h *este lansat un corp de masă* m *cu viteza* v_0. *Neglijând frecările cu aerul să se afle viteza corpului înainte de a atinge solul.*



1° Sistemul fizic izolat este format din Pământ și corpul aruncat care este atras de Pământ cu forța $\vec{G}$ (conservativă).
2° Starea inițială corespunde momentului lansării, iar starea finală corespunde momentului dinaintea atingerii solului (stările A și B din figură).
3° Când corpul de masă m se află la sol, energia potențială a sistemului este E_{p0}.

4° $E_A = E_{c_A} + E_{p_A} = \frac{mv_0^2}{2} + (mgh + E_{p_0})$

$E_B = E_{c_B} + E_{p_B} = \frac{mv_B^2}{2} + E_{p_0}$

5° $E_A = E_B$

rezultă: $v_B^2 = v_0^2 + 2gh \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

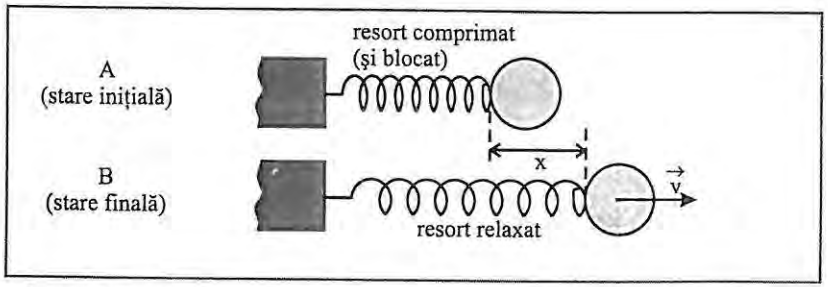
Regăsim rezultatul obținut prin aplicarea teoremei variației energiei cinetice și constatăm că valoarea constantei E_{p0} nu afectează rezultatul, motiv pentru care o vom considera nulă.

Problemă rezolvată

La "încărcarea" unui pistol jucărie resortul a fost comprimat pe distanța x = 5 cm. *Considerând* g = 10 m/s^2 *și constanta elastică a resortului* k = 50 N/m, *aflați cu ce viteză este aruncată o bilă de masă* m = 25 g. *Se consideră două cazuri:*
a) aruncare pe orizontală;
b) aruncare pe verticală de jos în sus.

Rezolvare:
Nu este necesar să reprezentăm întregul pistol, ci doar elementele importante: resortul și bila.
În ambele cazuri vom aplica legea conservării energiei mecanice pentru sistemul Pământ - resort - bilă în interiorul căruia se exercită forțe conservative (elastice și gravitaționale).

a)



Am reprezentat stările pentru sistemul ale cărui elemente au numai deplasări *orizontale*.
Energia potențială corespunde celor două tipuri de forțe conservative: gravitațională și elastică. Aplicăm legea conservării energiei mecanice:

$$E_A = E_B \Leftrightarrow E_{c_A} + E_{p_{gA}} + E_{p_{eA}} = E_{c_B} + E_{p_{gB}} + E_{p_{eB}}$$

Dar, punctele A și B se află la același nivel:

$$E_{p_{gA}} = E_{p_{gB}}$$

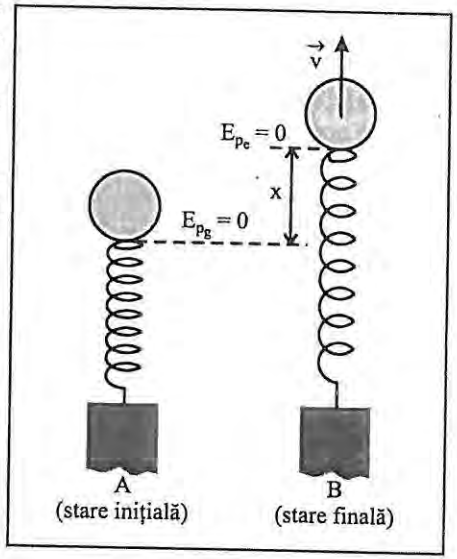
Inițial bila este în repaus: $E_{cA} = \frac{mv_A^2}{2} = 0$

În starea finală resortul este relaxat: $E_{p_{eB}} = 0$

Obținem: $\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$; numeric: v = 2,236 m/s

Se observă că energia potențială gravitațională nu influențează rezultatul. Acest lucru se explică prin faptul că, deși starea sistemului se schimbă, energia sa potențială gravitațională este constantă, având loc doar deplasări orizontale. În astfel de situații se poate face abstracție de energia potențială gravitațională.

b) În figură sunt reprezentate cele două stări (inițială și finală) ale sistemului Pământ - resort - bilă.



Este importantă precizarea nivelelor de referință pentru ambele tipuri de energie potențială:
$E_{p_g} = 0$ la partea superioară a resortului deformat (comprimat);
$E_{p_e} = 0$ la partea superioară a resortului relaxat (de care bila se desprinde cu viteza $\vec{v}$).
Aplicăm legea conservării energiei:

$$E_A = E_B$$

$$E_{c_A} + E_{p_{gA}} + E_{p_{eA}} = E_{c_B} + E_{p_{gB}} + E_{p_{eB}}$$

Cu precizările (convențiile) anterioare obținem:

$$E_{p_{eA}} = E_{c_B} + E_{p_{gB}} \Leftrightarrow \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgx$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} - mgx$$

$$v^2 = \frac{kx^2}{m} - 2gx \Rightarrow v = \sqrt{x\left(\frac{kx}{m} - 2g\right)}$$ numeric: v = 2 m/s

Valoarea mai mică a vitezei bilei în al doilea caz, se explică prin faptul că forța gravitațională ($\vec{G}$) a acționat ca forță rezistentă (deplasarea fiind verticală, în sus), pe când în primul caz a fost forță pasivă (deplasarea fiind orizontală).

3.4.1 LEGEA VARIAȚIEI ENERGIEI MECANICE TOTALE

Energia mecanică nu se conservă în prezența unor forțe de frecare (de rezistență), care sunt neconservative, chiar dacă sistemul este izolat.

Exemplu: la lansarea unui corp de masă m pe o suprafață, cu frecare, cu viteza inițială v_0, corpul are în momentul lansării energie mecanică (cinetică) $\frac{mv_0^2}{2}$, dar în final, după oprire, energia mecanică devine nulă.
În acest caz, energia mecanică nu se conservă, dar se regăsește în alte forme de energie (în primul rând sub formă de căldură).

Evident că *energia mecanică a unui sistem care nu este izolat nu se conservă.* Aceasta se întâmplă dacă cel puțin unul din corpurile (părțile) care compun sistemul este supus acțiunii unor forțe externe (aplicate de corpuri din afara sistemului).

Exemplu: dacă asupra unui corp lansat pe o suprafață orizontală, cu frecare, acționează pe direcția și în sensul vitezei o forță de *tracțiune* (forță activă) mai mare în modul decât forța de frecare, atunci *energia mecanică* (cinetică) nu va rămâne constantă ci *va crește.*

În cazul general al unui sistem izolat în interiorul căruia sunt și forțe conservative și forțe neconservative putem scrie:

$$\Delta E_c = L = L_{cons} + L_{necons}$$

$$\Delta E_p = -L_{cons}$$

Adunând membru cu membru cele două relații obținem:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = L_{necons}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta(E_c + E_p) &= L_{necons} \\ \Delta E &= L_{necons} \end{aligned}} \qquad (3.32)$$

Legea variației energiei mecanice totale:

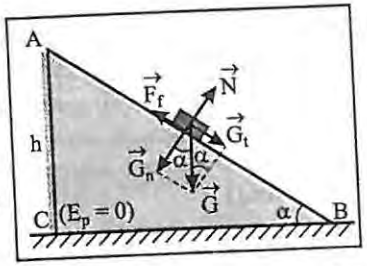
Variația energiei mecanice totale a unui sistem mecanic izolat este egală cu lucrul mecanic total al forțelor neconservative care acționează între părțile sistemului.

Probleme rezolvate

1

Aflați viteza cu care ajunge un corp la baza unui plan înclinat de unghi α față de orizontală și de înălțime h, *considerând că a pornit fără viteză inițială din vârful planului. Mișcarea este cu frecare de coeficient* μ.

Rezolvare:



Sistemul fizic căruia îi aplicăm legea variației energiei mecanice totale este constituit din Pământ, planul înclinat și corpul de masă m ce alunecă pe plan.
Considerăm că $E_p = 0$ la nivelul punctelor B și C.
Aplicăm legea variației energiei mecanice totale între punctele A și B:

$$\Delta E_{AB} = L_{necons} \qquad (1)$$

Între A și B acționează ca forță neconservativă, forța de frecare cu planul înclinat

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

pe distanța AB: $AB = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, forța de frecare efectuează lucrul mecanic:

$$L_{necons} = L_{F_f} = \vec{F}_f \cdot \vec{AB} = F_f \cdot AB \cdot \cos 180^0 = -\mu mg \cdot \cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mgh \cdot ctg\alpha$$

Scriem explicit relația (1):

$$E_B - E_A = L_{F_f}$$
$$(E_{c_B} + E_{p_B}) - (E_{c_A} + E_{p_A}) = L_{F_f}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} - mgh = -\mu mgh \cdot ctg\alpha$$
$$v_B^2 = 2gh(1 - \mu\, ctg\alpha); \quad v_B = \sqrt{2gh(1 - \mu\, ctg\alpha)}$$

Am considerat neglijabile frecările cu aerul.

Forțele de tracțiune pot fi și forțe *neconservative*. Justificarea acestui fapt se face similar celui din cazul forțelor de frecare, dar lucrul mecanic al acestor forțe este totdeauna pozitiv.
Vom aplica legea variației energiei mecanice totale într-o situație în care apar ca forțe neconservative forțele de tracțiune.

2

Un automobil de masă m *pornește rectiliniu din repaus și atinge viteza* v *după ce parcurge orizontal distanța* d. *Cunoscând rezultanta* $\vec{R}$ *a tuturor forțelor de frecare (rezistență), să se afle lucrul mecanic al forței de tracțiune (a motorului).*

Rezolvare:
Considerând plecarea din starea A și sosirea în starea B scriem legea variației energiei mecanice totale:

$$E_B - E_A = L_{F_t} + L_R$$

$$(E_{c_B} + E_{p_B}) - (E_{c_A} + E_{p_A}) = L_{F_t} - R \cdot d$$

$$\frac{mv^2}{2} = L_{F_t} - R \cdot d$$

Am considerat nivelul de referință al energiei potențiale gravitaționale chiar la nivelul automobilului și de aceea $E_{p_A} = E_{p_B} = 0$, iar $E_{c_A} = 0$ (pornirea din repaus).
Rezultă:

$$L_{F_t} = \frac{mv^2}{2} + Rd$$

Se poate constata foarte ușor că ajungem la același rezultat și aplicând teorema variației energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L; \quad E_{cB} - E_{cA} = L_{F_t} + L_R + L_G + L_N$$

Ținând cont că: $E_{c_A} = 0$, $L_G = L_N = 0$ (forțe pasive în acest caz), iar $L_R = -R \cdot d$

$$\Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} - 0 = L_{F_t} - R \cdot d \;\Rightarrow\; L_{F_t} = \frac{mv^2}{2} + R \cdot d$$

3.4.2 RANDAMENTUL MECANIC

În viața de toate zilele oamenii folosesc mecanisme simple și mașini pentru a-și ușura activitatea. Mecanismele simple (pârghii, scripeți, plane înclinate) oferă omului avantaje privind orientarea forței active și posibilitatea de a "învinge" forțe rezistente mari cu forțe active mici.

Analizăm din punct de vedere energetic două situații în care omul folosește mecanisme simple.

1. Un muncitor (A) dorește să urce pe platforma unui autocamion o ladă cu masa m = 100 kg.

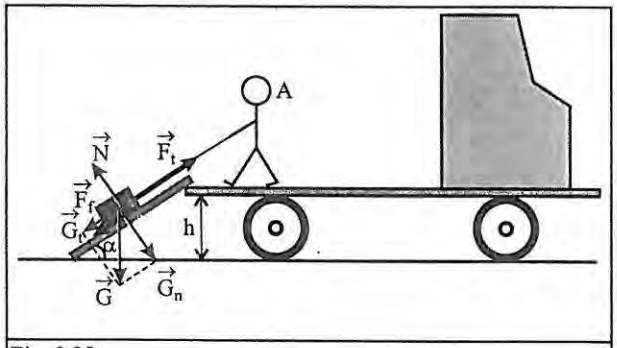


Fig. 3.28

Dacă ar fi ridicat lada direct pe verticală, cu viteză constantă, muncitorului i-ar fi fost necesară o forță $F_r = G$. Greutatea $\vec{G}$ acționează, în acest caz, ca *forță rezistentă*.

Lucrul mecanic al forței necesare pentru a învinge forța rezistentă îl numim **lucru mecanic util** (L_u).

$$L_u = |L_G|$$

Deoarece $F_r = G = 1000$ N este o forță prea mare (pentru un om obișnuit), muncitorul preferă să tragă lada cu viteză constantă pe un plan înclinat.
El acționează astfel cu o forță $\vec{F}_t$ (*forță activă*) care "învinge" greutatea $G_t = G\sin\alpha$ și forța de frecare $\vec{F}_f$ dintre ladă și plan.

$$F_t = G_t + F_f$$

Lucrul mecanic efectuat de forța activă îl numim **lucru mecanic consumat** (L_c).

$$L_c = F_t \cdot \ell$$

Dacă: h = 1,2 m, ℓ = 2,4 m, α = 30° și F_f = 200 N, atunci: $\sin\alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{1}{2}$ și F_t = 700 N (forță pe care omul este capabil să o exercite).

Numeric: $L_u = |L_G| = Gh = 1000 \cdot 1{,}2 = 1200$ J

$L_c = F_t \cdot \ell = 700\,N \cdot 2{,}4\,m = 1680$ J

Este avantajos ca muncitorul să folosească planul înclinat?
Dacă judecăm după faptul că muncitorul acționează cu F_t = 700 N în loc de F_r = 1000 N putem răspunde *DA*. Din punct de vedere energetic, răspunsul ar fi *NU*, deoarece omul consumă în realitate o energie egală cu L_c = 1680 J când energia necesară ar fi fost L_u = 1200 J (dacă nu folosea planul înclinat și ar fi ridicat corpul direct pe verticală).

2. Muncitorul B dorește să ridice la înălțimea h' = 10 m un corp cu masa m' = 48 kg.
Dacă nu ar folosi un scripete fix lucrul mecanic util ar fi:

$$L'_u = G'h' = m'gh$$

$$L'_u = 4\,800 \text{ J}$$

Folosind scipetele fix corpul este ridicat sub acțiunea unei forțe F'_t = 600 N > G (deoarece scripetele *nu este ideal*, adică are o anumită masă și există frecări la axul său atunci când se rotește).
Lucrul mecanic consumat este:

$$L'_c = F' \cdot h'$$

$$L'_c = 6\,000 \text{ J}$$

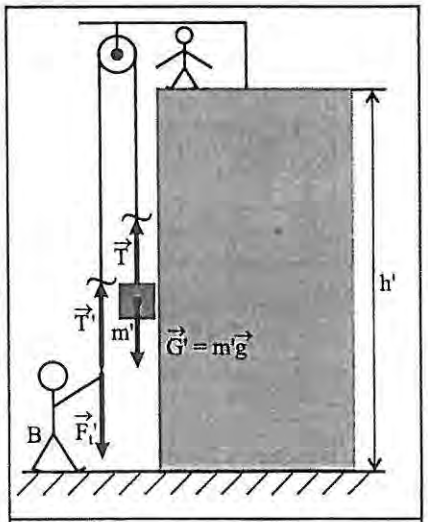


Fig. 3.29

În acest exemplu folosirea scripetelui nu aduce muncitorului un avantaj privind valoarea forței de tracțiune, dar creează un avantaj clar privind orientarea ei (îi este mai comod omului să tragă în jos).
Comparând cele două situații analizate ne punem întrebarea: care mecanism este mai eficient?

Ca să răspundem la întrebare trebuie să constatăm că un mecanism este un sistem fizic care *transferă* energie (lucru mecanic). Asupra mecanismului acționează într-un fel sau altul o *forță activă* care "furnizează" o anumită energie pe care o numim *energie consumată* ($E_c = L_c$). Din sistem (mecanism) se transferă spre un alt sistem (cel care primește, beneficiarul) o parte din energia furnizată, și anume *energia utilă* ($E_u = L_u$). Este clar că o parte din energia *intrată* se pierde, sau mai corect spus se regăsește în alte forme de energie.

Când unele părţi ale mecanismului se mişcă în raport cu altele, apar inevitabil frecări, care conduc la apariţia căldurii (tot o formă de energie ce conduce la amplificarea mişcării de agitaţie termică a moleculelor şi atomilor, deci la creşterea temperaturii părţilor respective).
Consideraţiile de mai sus ne conduc la definirea randamentului mecanic (al unui mecanism).
Randamentul mecanic (η) al unui mecanism este:

$$\boxed{\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{E_u}{E_c}} \qquad (3.33)$$

unde η (eta) este o mărime adimensională.

Dar: $L_c = L_u + L_f$
unde: $|L_{F_f}| = L_f = E_f$ este energia "pierdută" pentru învingerea frecărilor (sau regăsită în alte forme de energie). Rezultă: $L_u = L_c - L_f$ şi $E_u = E_c - E_f$. Deci:

$$\eta = \frac{L_c - L_f}{L_c} = 1 - \frac{L_f}{L_c} < 1 \qquad \text{sau} \qquad \eta = \frac{E_c - E_f}{E_c} = 1 - \frac{E_f}{E_c} < 1$$

adică, *randamentul este totdeauna subunitar*. El se exprimă fie ca un număr zecimal, fie în procente. În cazul exemplelor analizate:

$$\eta_A = \frac{L_u}{L_c} = \frac{1200\ J}{1680\ J} \approx 0,714 \quad \text{sau:} \quad \eta_A = 71,4\%$$

$$\eta_B = \frac{L'_u}{L'_c} = \frac{4800J}{6000J} = 0,800 \quad \text{sau:} \quad \eta_B = 80\%$$

Putem spune că în cazurile analizate, scripetele a avut un randament mai bun, sau că a fost mai eficient decât planul înclinat.
În practică, randamentul nu poate fi 100%, dar este de dorit să fie cât mai apropiat de această valoare. Pentru aceasta trebuie diminuate cât mai mult pierderile (datorate frecărilor în cazul sistemelor mecanice). În acest scop se folosesc rulmenţii care transformă frecarea la alunecare (mare) în frecare de rostogolire (mică). În plus la piesele mobile aflate în contact se folosesc uleiuri pentru ungere, micşorându-se astfel coeficientul de frecare, şi deci $E_f = L_f$.

Dacă definim puterile utilă şi consumată prin relaţiile: $P_u = \frac{L_u}{t}$ şi $P_c = \frac{L_c}{t}$,

putem să definim randamentul şi ca raport de puteri:

$$\boxed{\eta = \frac{P_u}{P_c}} \qquad (3.34)$$

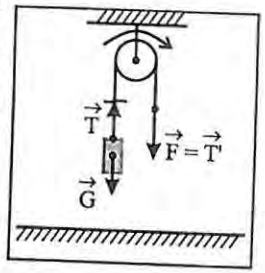
Întotdeauna din cauza pierderilor, energia furnizată (la ieşire) de către dispozitiv (maşină) este mai mică decât cea consumată (intrată în maşină).
În acest caz randamentul dispozitivului (maşinii) se defineşte prin:

$$\eta = \frac{\text{energia la ieşire}}{\text{energia la intrare}} = \frac{\text{puterea la ieşire}}{\text{puterea la intrare}} < 1$$

Problemă rezolvată

Peste un scripete fix cu randamentul $\eta = 80\%$ se trece un fir cu masa neglijabilă şi se leagă la un capăt un corp de masă $m_1 = 100$ g. Ce masă trebuie să aibă corpul legat la celălalt capăt pentru ca ambele corpuri să fie în echilibru?

Mai întâi deducem expresia randamentului unui *scripete fix*. Scripetele este folosit (de exemplu) pentru ridicarea unui corp de greutate $G = mg$ la înălţimea h. Greutatea joacă rolul forţei rezistente şi modulul lucrului mecanic al greutăţii este lucrul mecanic util $L_u = |L_G| = mgh$.



Lucrul mecanic consumat este cel al forţei active $F = T'$:

$$L_c = L_F = F \cdot h$$

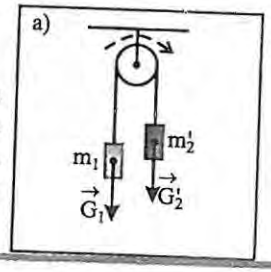
Din relaţia de definiţie a randamentului:

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{mgh}{Fh} = \frac{mg}{F} = \frac{G}{F}$$

(deoarece deplasările celor două forţe sunt egale).

Din relaţia: $F = \frac{G}{\eta} > G$ aflăm valoarea forţei active ce trebuie aplicată pentru *ridicarea* cu viteză *constantă* a corpului. Dacă ar fi să acţionăm astfel încât să *coborâm* corpul cu viteză constantă, rolurile se schimbă şi atunci:

$$\eta = \frac{F'}{G} \Rightarrow F' = \eta G < G$$

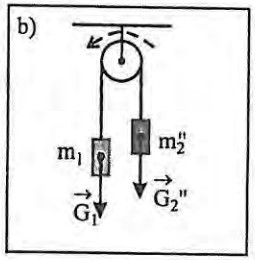


În cazul problemei noastre raţionăm astfel:
Considerăm că am aşezat în dreapta (fig. a) un corp de masă *maximă* m'_2 pentru care echilibrul încă este posibil; o masă mai mare cu foarte puţin decât m'_2 ar determina corpul m_1 să urce. În acest caz $\vec{G'_2}$ joacă rol de *forţă activă*, iar $\vec{G_1}$ de *forţă rezistentă*.

Randamentul este: $\eta = \frac{G_1}{G_2'} = \frac{m_1 g}{m_2' g} \Rightarrow \boxed{m_2' = \frac{m_1}{\eta}}$

Dacă am aşeza în dreapta un corp de masă *minimă* pentru care corpurile mai sunt în echilibru (dar la limita coborârii corpului m_1) greutatea $G_1 = m_1 g$ va avea rol de forţă activă şi $G_2'' = m_2'' g$ rol de forţă rezistentă:

$$\eta = \frac{G_2''}{G_1} = \frac{m_2'' g}{m_1 g} \Rightarrow \boxed{m_2'' = \eta m_1}$$



Aşadar, corpul cu masa $m_1 = 100$ g va fi în echilibru dacă

$m_2 \in [m_2'', m_2']$ unde: $m_2'' = 0{,}8 \cdot 100\,g = 80\,g$ şi
$m_2' = 100\,g/0{,}8 = 125\,g$

deci: $m_2 \in [80g; 125g]$.

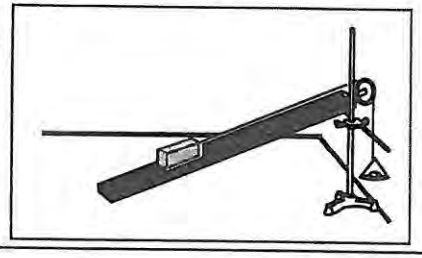
Lucrare de laborator

Determinarea randamentului mecanic al unui plan înclinat în cazul ridicării uniforme, prin alunecare, a unui corp solid.

1. Materiale necesare:

- plan înclinat, de unghi variabil, prevăzut cu un scripete fix la vârf (vezi dispozitivul experimental);
- corp paralelipipedic din lemn;
- taler;
- mase marcate;
- dinamometru;
- fir de aţă inextensibil;
- riglă.

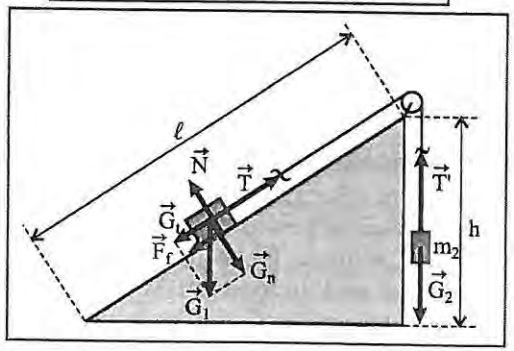
2. Dispozitivul experimental



3. Teoria lucrării

Randamentul planului înclinat de înălţime h şi lungime ℓ este:

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{G_1 \cdot h}{T \cdot \ell} \qquad (1)$$



unde $\vec{T}$ este tensiunea în fir (forţa activă) care deplasează corpul în sus pe plan, iar $\vec{G}_1$ forţa rezistentă.

În cazul mişcării uniforme:

– pentru corpul m_2:

$$\vec{G}_2 + \vec{T}' = \vec{0} \Rightarrow T' = G_2 \quad T' = m_2 g \qquad (2)$$

Dar $T' = T$, deoarece firul are masă neglijabilă.

Randamentul scripetelui fiind foarte mare (peste 95%) îl considerăm 100%.

Rezultă: $T = m_2 g$ (3)

– pentru corpul m_1:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{pe direcţia paralelă cu planul,} \\ T = G_t + F_f, \text{ unde } G_t = \frac{G_1 \cdot h}{\ell} \\ \text{pe direcţia perpendiculară pe plan,} \\ N = G_n \end{cases}$$

Din (1) şi (3) rezultă: $\eta = \frac{G_1 \cdot h}{m_2 g \cdot \ell} = \frac{G_1 \cdot h}{G_2 \cdot \ell}$ (4)

4. Modul de lucru

– măsuraţi greutatea corpului paralelipipedic (G_1), cu ajutorul dinamometrului;
– realizaţi montajul experimental;
– măsuraţi lungimea (ℓ) şi înălţimea (h) planului înclinat;
– puneţi pe taler mase marcate (m_2 – masa talerului şi a maselor marcate) până când corpul m_1 urcă aproximativ uniform pe plan, pornind datorită unor uşoare ciocănituri pe placa acestuia;
– repetaţi experimentul de cel puţin trei ori;
– înregistraţi datele într-un **Tabel de valori:**

Nr. det.	G_1 (N)	ℓ (m)	h (m)	m_2 (kg)	G_2 (N)	L_u (J)	L_c (J)	η	$\bar{\eta}$
1									
⋮									

– precizaţi intervalul în care se află valoarea randamentului planului înclinat;
– reluaţi experimentul pentru alte unghiuri ale planului înclinat; analizaţi şi interpretaţi rezultatele obţinute;
– precizaţi sursele de erori.

PROBLEME

1

Ce energie cinetică are un glonț cu masa de 10 g, la ieșirea din țeava unei arme cu viteza de 500 m/s? Ce energie cinetică are o piatră cu masa de 10 ori mai mare decât a glonțului și viteza de 10 ori mai mică? Comparați rezultatele.

2

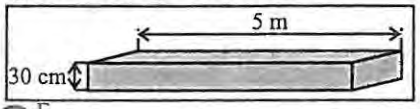
Un om cu masa m = 70 kg urcă uniform în timp de 20 secunde la etajul al treilea (h = 12 m) al unei clădiri. Să se afle puterea dezvoltată de om și cu cât a crescut energia sa potențială.

3 E

Un corp este atârnat de două resorturi legate în serie având constantele elastice $k_1 = 1$ N/cm și $k_2 = 2$ N/cm.
Care este raportul energiilor potențiale ale resorturilor?

4

O grindă paralelipipedică omogenă are dimensiunile din figură și masa de 1,5 t. Alegând ca nivel de referință solul, aflați:
a) energia potențială a grinzii după ce a fost ridicată în poziție verticală;
b) care este variația energiei potențiale a grinzii în timpul ridicării.

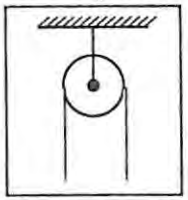


5 E

Să se deducă expresia densității de energie potențială w_p (energia potențială pe unitatea de volum nedeformat) înmagazinată de o bară elastică întinsă, cunoscând modulul lui Young E și alungirea relativă ε (sau efortul unitar σ).

6

Un lanț de lungime ℓ este trecut simetric peste un scripete ideal (a cărui rază este mult mai mică decât lungimea lanțului) și este în repaus.



Printr-un impuls foarte mic lanțul este pus în mișcare. Ce viteză are lanțul când părăsește scripetele?
În cazul în care lanțul se află întins pe o masă orizontală (fără frecări) și în urma unui impuls foarte mic, începe să lunece, care va fi viteza lui la părăsirea mesei?

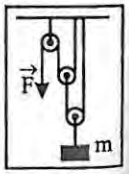
7

O cascadă pune în mișcare generatorul unei hidrocentrale care furnizează o putere electrică P = 80 kW. Dacă apa ($\rho = 10^3$ kg/m^3) cade de la o înălțime h = 10 m, g = 10 m/s^2, iar randamentul hidrocentralei este η = 80% să se afle debitul volumic al cascadei definit prin:

$$Q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t};\ [Q_V]_{S.I.} = \frac{m^3}{s}$$

8

Ce randament are sistemul de scripeți reprezentat în figură, dacă pentru urcarea uniformă a corpului cu masa m = 120 kg se trage în jos cu forța F = 320 N?

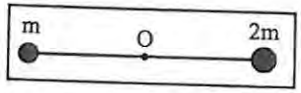


9

Să se afle randamentul unui plan înclinat de unghi α = 45° folosit pentru urcarea unui corp pe plan, dacă unghiul de frecare este φ = 30°.

10

Haltera din figură are o bilă de masa m, cealaltă de masă 2m și tija de masă neglijabilă.



Haltera cu lungimea 2ℓ pornește din repaus, din poziție orizontală, rotindu-se în jurul mijlocului tijei.
Aflați viteza unei bile când haltera trece prin poziție verticală.

11 E

O bilă suspendată de un fir elastic și flexibil îl întinde cu x = 5 cm. Bila este ridicată cu h = 20 cm față de capătul inferior al firului nedeformat și lăsată să cadă liber pe verticala punctului de suspensie. Care va fi întinderea maximă produsă de bilă în cădere?

12 E

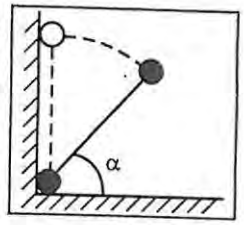
O bilă cade de la înălțimea $h_1 = 1$ m pe un resort. Comprimarea maximă a resortului este $x_1 = 1$ cm. Cât va fi comprimarea maximă a resortului dacă bila va cădea de la înălțimea $h_2 = 2$ m?

13

Cu ce viteză ar ajunge pe Pământ un corp lăsat liber la înălțimea h = 2R (unde R = 6 370 km este raza Pământului) față de suprafața Pământului?
Se dă $g_0 = 9{,}8$ m/s^2.
Se neglijează orice frecări.

14

Haltera din figură pornește din poziția verticală din stare de repaus. Masa tijei este neglijabilă, iar bilele din capete au masa m fiecare. Neglijând frecările, să se afle cu ce forță apasă bila inferioară asupra peretelui vertical, atunci când în cădere, haltera face unghiul α cu orizontala.

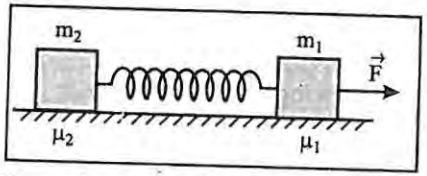


15 E

Un resort de constantă elastică k este fixat la capătul superior, iar la capătul inferior are legată o bilă. Din poziția de echilibru bila este deplasată lent în jos și eliberată de la distanța x față de poziția de echilibru. La ce distanță y se va opri bila față de poziția de echilibru? Dacă masa bilei este m cu ce accelerație pornește ea și ce viteză maximă atinge?

16 E

În sistemul reprezentat în figură corpurile de mase m_1 și m_2 sunt în repaus pe o suprafață orizontală cu frecări de coeficienți de frecare μ_1 și μ_2. Resortul este inițial nedeformat.



Să se afle cu ce forță minimă trebuie tras orizontal m_1 pentru ca m_2 să lunece:
a) când F = const.;
b) când forța F crește foarte lent.

TEST

I

Alegeţi exprimările corecte şi reformulaţi-le pe cele incorecte.

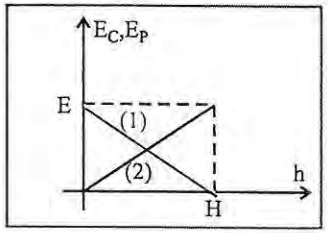
a) Energia potenţială se defineşte pentru o particulă.
b) Energia potenţială este o mărime de stare.
c) Energia potenţială se defineşte pentru sisteme deformabile ale căror părţi interacţionează prin forţe conservative.
d) Energia potenţială se exprimă prin relaţia $E_p = mgh$.
e) La schimbarea stării sistemului, energia potenţială variază cu $\Delta E_p = -L_{necons}$.

1p

II

Alegeţi varianta corectă.

a) La aruncarea pe verticală de jos în sus a unei pietre, în absenţa frecărilor cu aerul, energia mecanică totală a acesteia *este constantă / scade.*
b) La coborârea liberă pe un plan înclinat cu frecare, energia mecanică totală a unui corp *este constantă / scade.*
c) Un corp cade liber fără frecări de la înălţimea H. Energia cinetică în funcţie de înălţimea h faţă de sol este reprezentată grafic prin *segmentul* (1) / (2).
d) Variaţia energiei mecanice totale a unui sistem mecanic izolat *este / nu este* egală cu lucrul mecanic al forţelor neconservative.



1,5p

III

Alegeţi răspunsurile corecte.

Un tren cu locomotivă electrică se mişcă rectiliniu uniform timp de 10 minute pe o cale ferată orizontală. În timpul mişcării:
a) energia cinetică a trenului este constantă;
b) nu acţionează asupra trenului forţe neconservative;
c) energia potenţială a trenului nu variază;
d) lucrul mecanic al forţelor neconservative este nul;
e) energia electrică primită de motorul locomotivei de la reţea compensează pierderile datorită frecărilor.

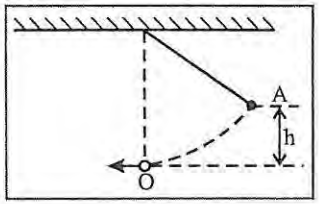
1p

IV

Bila reprezentată în figură este lăsată liberă din punctul A ($v_A = 0$). Mişcându-se fără frecări bila va trece prin punctul O cu viteza:

a) $\frac{mgh}{2}$; b) $\sqrt{2mgh}$; c) $\sqrt{2gh}$;

d) $\sqrt{\frac{gh}{2}}$; e) $\sqrt{gh}$.



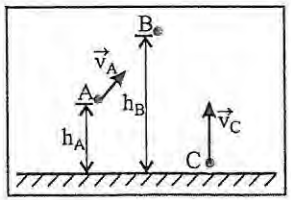
1,5p

V

În figura de mai jos sunt reprezentate trei pietre A, B, C cu masele egale şi vitezele: $v_C = 2v_A = 20$ m/s, $v_B = 0$.
Bilele se află, faţă de sol, la înălţimile: $h_B = 2h_A = 20$ m; $h_C = 0$.

Între energiile mecanice totale ale celor 3 pietre există relaţiile:

a) $E_A > E_B > E_C$ b) $E_A = E_B < E_C$
c) $E_A < E_B = E_C$ d) $E_A = E_B > E_C$
e) $E_A < E_C < E_B$



2p

VI

Un corp este urcat uniform pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ cu un randament $\eta = 80\,\%$. Să se afle coeficientul de frecare dintre corp şi plan. 2p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute.

3.5 TEOREMA VARIAȚIEI IMPULSULUI (extindere)

3.5.1 IMPULSUL PUNCTULUI MATERIAL

Pentru a imprima unui corp, aflat în repaus, o anumită viteză, trebuie ca asupra lui să acționeze o forță.

Lansatorul L din figura 3.30 este prevăzut cu un resort comprimat. Când se arde firul resortul se destinde împingând lansatorul spre bila B. Acesta acționând cu o forță asupra bilei B (aflată inițial în repaus) o pune în mișcare cu o anumită viteză. Se spune că bila a primit un *impuls*.

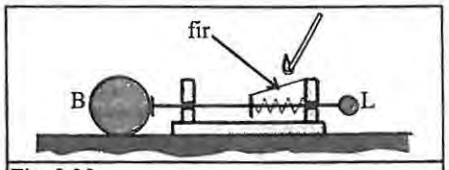


Fig. 3.30

Impulsul punctului material ($\vec{p}$) este mărimea fizică vectorială egală cu produsul dintre masa (m) și viteza lui ($\vec{v}$):

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}} \qquad (3.35)$$

Unitatea de măsură a impulsului în S.I. este:

$$[p]_{S.I.} = [m]_{S.I.} \cdot [v]_{S.I.} = kg \cdot \frac{m}{s} = N \cdot s$$

Masa fiind o mărime scalară pozitivă, impulsul are aceeași direcție și același sens cu viteza (fig. 3.31).

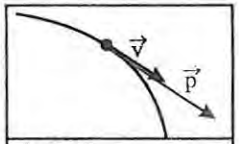


Fig. 3.31

Reprezentați vectorul impuls în cazul în care un punct material descrie o traiectorie rectilinie.

3.5.2 TEOREMA VARIAȚIEI IMPULSULUI MECANIC LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PUNCTULUI MATERIAL

Dacă forța rezultantă ce acționează asupra punctului material nu este constantă o putem înlocui cu forța medie ($\vec{F}_m$).

Forța medie pe un interval de timp Δt este egală cu o forță constantă care produce aceeași accelerație medie ca și forța variabilă dată.

Aplicăm principiul fundamental al mecanicii:

$$m\vec{a}_m = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}_m$$

Teorema variației impulsului unui punct material:

Variația impulsului punctului material raportată la intervalul de timp în care se produce această variație este egală cu forța rezultantă medie ce acționează asupra punctului material.

$$\boxed{\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_m} \qquad (3.36)$$

Relația (3.36) poate fi scrisă și astfel:

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t} \qquad (3.37)$$

Produsul $\vec{F}_m \cdot \Delta t$ se numește *impulsul forței*.

Variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței aplicate punctului material.

Problemă rezolvată

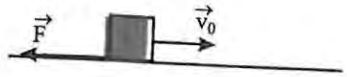
Un punct material cu masa 2 kg care se mișcă rectiliniu are viteza inițială $v_0 = 3$ m/s. *O forță* F = 6 N *acționează asupra punctului material pe direcția mișcării și în sens opus timp de* 3 s. *Să se determine viteza finală.*

Rezolvare:

Aplicăm teorema variației impulsului:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{p} - \vec{p}_0$$

pe axa Ox: $-F\Delta t = mv - mv_0$



$$v = \frac{mv_0 - F\Delta t}{m}$$

numeric: v = – 6 m/s (punctul material și-a schimbat sensul de mișcare).

Dacă impulsul forței aplicate este zero, de exemplu $\vec{F} = \vec{0}$, adică punctul material este izolat atunci $\Delta\vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{const.}$

Legea conservării impulsului punctului material:

În sistemele de referință inerțiale impulsul unui punct material izolat se conservă ($\vec{p} = \overrightarrow{const.}$) adică punctul material izolat se mișcă rectiliniu uniform sau este în repaus.

Observații:

- Impulsul punctului material este o măsură a mișcării sale mecanice.
- Verificarea experimentală a teoremei impulsului se reduce la verificarea principiului fundamental al mecanicii.

3.5.3 LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Ori de câte ori două puncte materiale interacţionează, impulsul fiecărei particule variază, ca urmare a forţei exercitate asupra ei din partea celeilalte.
Conform principiului al III-lea al mecanicii forţa exercitată asupra unei particule este egală ca modul şi de sens opus forţei exercitate asupra celeilalte particule. Când sistemul format de cele două particule este *izolat* impulsurile celor două forţe au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri opuse şi atunci variaţia impulsului fiecărei particule, în orice interval de timp este egală ca modul şi de sens opus cu variaţia impulsului celeilalte. Variaţia totală a sistemului celor două particule este deci zero.
Aşa se întâmplă şi în cazul căruciorului prevăzut cu lansator de bile din figura 3.32. Căruciorul şi bila B constituie un sistem izolat deoarece rezultanta forţelor externe care acţionează asupra lor este nulă. Impulsul total iniţial al sistemului este nul (părţile sistemului fiind în repaus). Când se arde firul resortul se destinde, iar bila acţionată de lansator (L) va fi împinsă spre stânga, iar căruciorul (acţionat de bilă) spre dreapta.

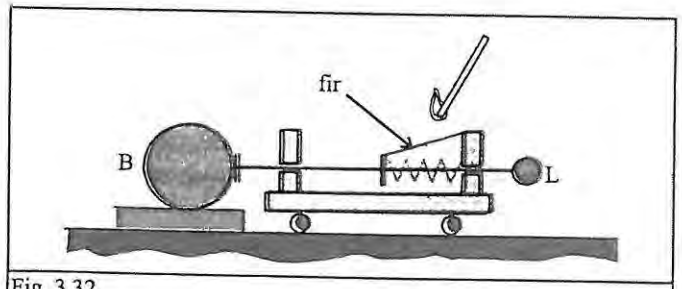


Fig. 3.32

Perechea de forţe acţiune-reacţiune reprezintă forţele interne ale sistemului, care nu pot modifica impulsul total al sistemului.
Aceste consideraţii ne permit să enunţăm **legea conservării impulsului unui sistem de puncte materiale:**

Dacă rezultanta forţelor exterioare ce acţionează asupra unui sistem de puncte materiale este permanent nulă, atunci impulsul total al sistemului rămâne *constant*, adică *se conservă*.

Observaţie:
➢ Energia mecanică a unui sistem izolat se conservă numai dacă forţele interne sunt conservative. *Legea conservării impulsului este valabilă indiferent de natura forţelor interne, conservative sau nu.*

Problemă rezolvată

Într-o barcă ce pluteşte pe un lac se află un om şi două bile de masă m *fiecare. Barca şi omul au împreună masa* M. *Întregul sistem este iniţial în repaus. Omul aruncă orizontal în acelaşi sens, succesiv, cele două bile, de fiecare dată cu viteza* u *faţă de barcă. Neglijând forţele de rezistenţă, să se afle ce viteză finală are barca şi ce lucru mecanic a efectuat forţa cu care omul a aruncat bilele.*

Rezolvare:

Deoarece rezultanta forţelor exterioare ce acţionează asupra sistemului om-barcă-bile este permanent nulă, impulsul total al acestui sistem se va conserva. Ţinem cont că viteza *relativă* a primei bile în raport cu barca este şi viteza *absolută* (faţă de apă).
Conservarea impulsului la prima aruncare se scrie:

$$(M + 2m) \cdot v_0 = (M + m)v_1 + mu$$

Dar $v_0 = 0 \Rightarrow v_1 = -\dfrac{mu}{M+m}$ (viteza bărcii după aruncarea primei bile).

Viteza *absolută* a celei de-a doua bile la aruncare este $v' = u + v_1$.
Aplicăm din nou legea conservării impulsului, de data aceasta pentru sistemul om-barcă-bila 2:

$$(M+m)v_1 = Mv_2 + mv'; \qquad (M+m)v_1 = Mv_2 + m(u + v_1)$$

$$Mv_1 + mv_1 = Mv_2 + mu + mv_1 \Rightarrow$$

$$v_2 = v_1 - \frac{mu}{M} = -\frac{mu}{M+m} - \frac{mu}{M} = -\frac{m(2M+m)}{M(M+m)} \cdot u$$

Semnul "–" arată că barca se mişcă în sens opus celui în care au fost aruncate bilele. Lucrul mecanic efectuat este egal cu suma energiilor cinetice create:

$$L = E_C' = \frac{mu^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m}{2}u^2 + \frac{m}{2}\left(u - \frac{mu}{M+m}\right)^2 + \frac{M}{2}\left[\frac{m(2M+m)}{M(M+m)}u\right]^2 =$$

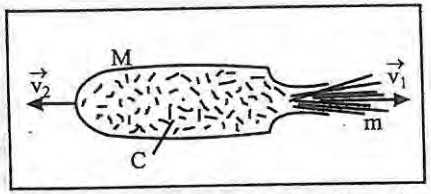
$$= \frac{mu^2}{2}\left[1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 + \frac{m}{M}\left(\frac{2M+m}{M+m}\right)^2\right]$$

În cazul în care M >> m observăm că al doilea termen din paranteza mare este practic egal cu 1, iar ultimul este practic nul, caz în care obţinem:

$$L = 2\frac{mu^2}{2} = mu^2$$

Acest ultim rezultat era de aşteptat, deoarece barca de masă foarte mare rămâne practic în repaus, iar lucrul mecanic este efectuat doar pentru a pune bilele în mişcare cu viteza u şi faţă de barcă şi faţă de apă.

Motorul cu reacţie



O aplicaţie a legii conservării impulsului este motorul cu reacţie care intră în componenţa unei rachete.
În principiu, el se compune dintr-o cameră de ardere C, în care se găseşte combustibil. În partea din spate camera este deschisă. Când combustibilul arde gazele care rezultă din ardere ies prin deschidere cu viteză mare $\vec{v}_1$.
Forţa $\vec{F}$ care rezultă din presiunea ce ia naştere prin arderea combustibilului acţionează simultan şi cu aceeaşi valoare, atât asupra camerei de ardere de masă M, cât şi a gazelor cu masa m care ies.
Aplicând legea conservării impulsului:

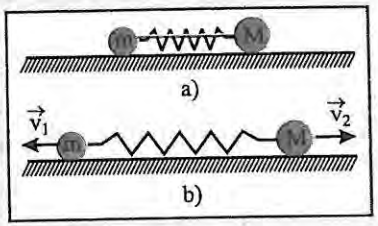
$$Mv_2 - mv_1 = 0; \quad v_2 = \frac{mv_1}{M}$$

Dar, $M > m \Rightarrow v_2 < v_1$

Viteza rachetei v_2 va fi mai mică decât viteza de evacuare a gazelor v_1. Dacă însă explozia se repetă succesiv, la fiecare cantitate m de gaze care se evacuează, viteza rachetei va creşte astfel încât ea va atinge foarte repede viteze foarte mari.

Reculul armelor de foc

Efectuaţi următorul experiment, folosind un resort comprimat, cu ajutorul unui fir şi două sfere de mase diferite M şi m.
Aşezaţi resortul între cele două sfere pe o suprafaţă lucioasă (fig. a). Ardeţi firul care menţine resortul comprimat şi observaţi mişcarea celor două sfere (fig. b).



Iniţial impulsul sistemului fiind nul cele două sfere sunt proiectate în sensuri diferite cu vitezele $\vec{v}_1$ şi respectiv $\vec{v}_2$ astfel încât:

$m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0$ (teorema conservării impulsului)

Deci, $m\vec{v}_1 = -M\vec{v}_2$ Rezultă: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{M}$

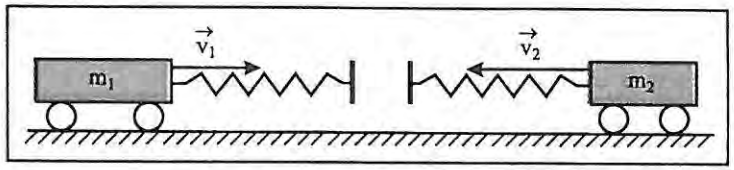
Această experienţă explică reculul armelor de foc.
Raportul între masa proiectilului m şi masa armei M fiind foarte mic, viteza de recul a armei ($\vec{v}_2$) nu este decât o fracţiune mică din viteza proiectilului ($\vec{v}_1$).

3.6 CIOCNIRI (facultativ)

Ciocnirea a două corpuri macroscopice este un proces de interacţiune care durează un timp finit, astfel încât înainte şi după ciocnire corpurile nu interacţionează.

De obicei, ciocnirea corpurilor macroscopice durează atât timp cât corpurile sunt în contact, timpul de contact fiind foarte scurt (de ordinul milisecundelor). Forţele cu care interacţionează corpurile care se ciocnesc (forţe interne) sunt mult mai mari decât forţele exterioare care se exercită asupra corpurilor. Astfel sistemul format din cele două corpuri care se ciocnesc poate fi considerat izolat şi din această cauză impulsul total al sistemului se conservă.

Ca să înţelegem mai bine ce se întâmplă într-un proces de ciocnire, analizăm interacţiunea a două cărucioare (prevăzute cu resorturi-tampoane) care vin unul spre altul cu vitezele $\vec{v}_1$, respectiv $\vec{v}_2$.



În general, ciocnirea a două corpuri macroscopice are două faze (etape):

- *Faza comprimării* (deformării reciproce) începe când corpurile ajung în contact şi se termină când viteza unuia faţă de celălalt este *nulă*, iar deformările reciproce sunt *maxime*. În această etapă o parte a energiei cinetice a corpurilor *se transformă* în energie de *deformare*.

- *Faza separării* începe la terminarea fazei comprimării. În această fază corpurile caută să revină la forma iniţială şi să se depărteze unul faţă de altul. În cazul unor corpuri *perfect elastice* acestea revin *complet* la forma iniţială, iar energia de *deformare* se *retransformă* în energie *cinetică*. În această situaţie ciocnirea se numeşte *perfect elastică*, iar energia cinetică totală *după* ciocnire este *egală* cu cea *dinaintea* ciocnirii.

În cazul unor corpuri care s-au deformat plastic (bile din plumb sau din plastilină), corpurile nu mai revin la forma iniţială, faza separării lipseşte, iar corpurile se mişcă în acest caz solidar, cu aceeaşi viteză. În acest caz o parte din energia cinetică (cea care se transformase în energie de deformare în prima fază) se transformă în alte forme de energie (în special, căldură), iar ciocnirea se numeşte *plastică*.

3.6.1 CIOCNIREA PLASTICĂ

Două puncte materiale de mase m_1 şi m_2 având vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ se ciocnesc *plastic*. După ciocnire se formează un singur corp cu masa $m_1 + m_2$ şi viteza $\vec{v}'$.
Aplicăm legea conservării impulsului total:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$$

Viteza după ciocnire este:

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}} \qquad (3.38)$$

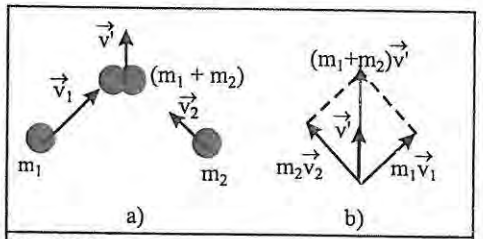


Fig. 3.33

Observaţii:

➢ Viteza după ciocnirea plastică are direcţia rezultantei impulsurilor corpurilor înainte de ciocnire (fig. 3.33).

➢ În cazul în care corpurile se mişcă pe aceeaşi dreaptă, viteza după ciocnire nu-şi schimbă direcţia.

În timpul ciocnirii plastice o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie, în special în căldură.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + Q$$

Căldura degajată prin ciocnire este:

$$\boxed{Q = -\Delta Ec = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2} \qquad (3.39)$$

Înlocuind pe v' din relaţia (3.38) obţinem:

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2} \qquad (3.40)$$

unde notăm: $m_r = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ *masa redusă* a celor două corpuri şi

$\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ *viteza relativă* a corpului 1 faţă de corpul 2.

şi obţinem:

$$\boxed{Q = \frac{m_r\vec{v}_r^2}{2} = \frac{m_rv_r^2}{2}} \qquad (3.41)$$

unde: $v_r^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha$, iar $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

3.6.2 CIOCNIREA PERFECT ELASTICĂ

Ciocnirea este perfect elastică dacă energia cinetică a corpurilor se conservă.
În natură nu există ciocnire perfect elastică între corpuri macroscopice, dar unele ciocniri pot fi aproximate ca perfect elastice.

Exemplu: ciocnirile dintre corpurile elastice ca: bile pentru biliard, bile din fildeş sau oţel, cărucioare prevăzute cu tampoane-resorturi elastice etc.
În cazul ciocnirii perfect elastice vitezele corpurilor după ciocnire ($\vec{v}'_1$şi $\vec{v}'_2$) se determină aplicând legea conservării impulsului sistemului:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

şi legea conservării energiei cinetice a sistemului:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

În cazul cel mai general, sistemul format din ecuaţiile de mai sus are patru ecuaţii (trei de la conservarea impulsului şi una de la conservarea energiei) cu şase necunoscute (v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z}, v'_{2x}, v'_{2y} şi v'_{2z}); rezolvarea sistemului nu este posibilă decât dacă obţinem şi alte informaţii despre ciocnirea propriu-zisă (de exemplu, cunoaşterea direcţiilor de mişcare după ciocnire etc.).
În cazul în care, înainte şi după ciocnire, particulele se mişcă pe aceeaşi dreaptă (ciocnire *unidimensională* sau *frontală*), pentru determinarea vitezelor după ciocnire se rezolvă sistemul celor două ecuaţii de conservare astfel:
Se trec termenii care conţin pe m_1 în stânga şi cei care conţin pe m_2 în dreapta:

$$\begin{cases} m_1v_1^2 - m_1v_1'^2 = m_2v_2'^2 - m_2v_2^2 \\ m_1v_1 - m_1v_1' = m_2v_2' - m_2v_2 \end{cases}$$

Deoarece în urma interacţiunii dintre corpuri $v'_1 \neq v_1$ şi $v'_2 \neq v_2$ se pot împărţi cele două ecuaţii membru cu membru:

$$\frac{m_1(v_1^2 - v_1'^2)}{m_1(v_1 - v_1')} = \frac{m_2(v_2'^2 - v_2^2)}{m_2(v_2' - v_2)}$$

şi obţinem: $v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$
Această ecuaţie, împreună cu ecuaţia conservării impulsului, formează un sistem de două ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute, prin rezolvarea căruia se determină *vitezele celor două corpuri după ciocnirea unidimensională*:

$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= \frac{2m_2v_2 + m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{2m_1v_1 + m_2v_2 - m_1v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\begin{aligned} v'_1 &= \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \\ v'_2 &= \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_2 \end{aligned}} \qquad (3.42)$$

Observații:

➢ Când corpul 2 este în repaus înainte de ciocnire ($v_2 = 0$) obținem:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \text{ și } v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

În acest caz, corpul 2 capătă viteza v_2' în sensul în care este lovit (v_2' are același semn cu v_1), în timp ce primul corp se poate întoarce înapoi dacă masa sa m_1 este mai mică decât a celui de-al doilea corp ($m_1 - m_2 < 0$, deci v_1' are sens opus lui v_1).

➢ Dacă masele corpurilor sunt egale, corpurile își schimbă vitezele între ele ($v_1' = v_2$ și $v_2' = v_1$). Dacă al doilea corp este inițial în repaus ($v_2 = 0$) atunci primul corp se oprește ($v_1' = 0$) și al doilea pornește cu viteza primului ($v_2' = v_1$).

Verificați aceste rezultate experimental folosind două bile identice, suspendate de fire paralele, cu lungimi egale, din care una este în repaus (fig. 3.34).

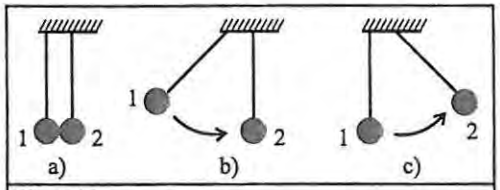


Fig. 3.34

➢ Dacă unul dintre corpuri are masa foarte mare (de exemplu, $m_2 >> m_1$) viteza acestuia nu se modifică prin ciocnire. O astfel de ciocnire se numește *ciocnire cu un perete*.

Exemplu: ciocnirea unei mingi cu un perete.

În cazul unei ciocniri perfect elastice unidimensională vitezele după ciocnire pot fi scrise și sub forma:

$$v_1' = \frac{2v_2 + \frac{m_1}{m_2}v_1 - v_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \text{ și } v_2' = \frac{2\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2 - \frac{m_1}{m_2}v_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

Deoarece $m_2 >> m_1$, fracția $\frac{m_1}{m_2}$ tinde spre zero și astfel vitezele după ciocnire, devin:

$$\boxed{v_1' = 2v_2 - v_1 \text{ și } v_2' = v_2} \quad (3.43)$$

Dacă peretele este în repaus, $v_2 = 0$ și atunci: $v_1' = -v_1$ și $v_2' = 0$

PROBLEME

1

Ce impuls are un autoturism cu masa de o tonă care se mișcă rectiliniu uniform cu viteza v = 72 km/h?

2

Care este impulsul unui vagon cu masa 10 t ce se deplasează cu viteza 72 km/h? Ce viteză trebuie să aibă un alt vagon cu masa 5 t pentru a avea:
a) același impuls?
b) aceeași energie cinetică?

3

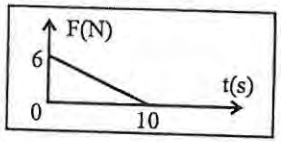
O halteră are la capete bile având masa m = 5 kg fiecare. Dacă lungimea tijei este ℓ = 1 m și haltera se rotește față de mijlocul ei cu frecvența n = 120 rot/min, să se afle:
a) impulsul unei bile;
b) impulsul total al halterei.

4

O minge de baseball cu masa 0,2 kg este aruncată cu viteza de 30 m/s, iar după ce este lovită cu bastonul viteza ei devine 50 m/s în sens contrar.
a) Care este variația impulsului mingii?
b) Determinați forța medie a lovirii dacă mingea rămâne în contact cu bastonul timp de 2 milisecunde.

5

Asupra unui corp de masă m = 2 kg, aflat inițial în repaus începe să acționeze forța a cărei variație este reprezentată grafic în figura de mai jos.
Ce viteză are corpul după 10 secunde?



6

Un corp mic de masă m = 1 kg se mișcă pe un cerc cu viteză constantă de modul v = 10 m/s.
Care este variația impulsului corpului după:
a) un sfert de rotație?
b) o jumătate de rotație?

7

Un glonte părăsește țeava armei cu viteza de 300 m/s. Forța exercitată asupra glontelui în interiorul țevii este dată de relația:

$$F = 400 - \frac{4 \cdot 10^5}{3} t \text{ (N)}$$

Știind că forța se anulează la capătul țevii:
a) reprezentați grafic F = f(t);
b) calculați timpul în care glontele parcurge lungimea țevii;
c) determinați impulsul forței;
d) aflați masa glontelui.

8

Un avion ce zboară cu viteza 900 km/h lovește o pasăre de masă m = 2kg care are o viteză mică înainte de contactul cu avionul. Dacă durata ciocnirii este o milisecundă, să se afle forța medie de

impact şi presiunea medie exercitată de pasăre asupra avionului dacă suprafaţa de contact cu acesta este $S = 4\ dm^2$.

9

Un vânător stă pe gheaţă şi trage un foc de armă în direcţie orizontală. Dacă vânătorul cu puşca şi echipamentul are masa 70 kg, glonţul are masa 10 g şi viteza la ieşirea din ţeavă 700 m/s, să se calculeze viteza de recul a vânătorului (se neglijează frecarea).

10

O bilă având masa m = 100 g şi viteza v = 10 m/s loveşte perfect elastic un perete, timpul de impact cu acesta fiind Δt = 1 ms. Să se afle forţa medie de impact în două cazuri:
a) vectorul $\vec{v}$ este normal pe perete;
b) vectorul $\vec{v}$ face un unghi de 60° cu normala pe perete.

11 F

Un glonte cu masa 50 g, intră cu viteza 400 m/s într-un bloc de lemn fixat pe pământ. Presupunând forţa de frecare constantă şi ştiind că pătrunde pe o distanţă de 10 cm, calculaţi:
a) accelerația de frânare şi forţa de frânare;
b) impulsul forţei. Comparaţi-l cu impulsul iniţial al glontelui.

12 F

Dintr-o bucată de plastilină s-au confecţionat două bile, care puse apoi în mişcare, se ciocnesc plastic. Pentru ce raport al maselor celor două bile pierderea de energie cinetică va fi maximă?

13 F

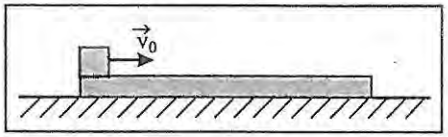
Un vagon de marfă gol, cu masa 10 t, rulează cu viteza de 7,2 km/h pe o cale ferată orizontală. El ciocneşte un vagon încărcat, cu masa 20 t, care se află în repaus, fără frâne. Dacă vagoanele se cuplează, ce viteză au după ciocnire?

14 F

Două corpuri având masele $m_1 = 3$ kg şi $m_2 = 6$ kg se mişcă pe o dreaptă cu vitezele $v_1 = 2$m/s şi respectiv $v_2 = -4$ m/s. Să se afle viteza lor după ciocnirea perfect elastică. Dacă timpul de ciocnire este $\Delta t = 0{,}5$ ms, cât este forţa medie de ciocnire?

15

O scândură de masă M = 8 kg foarte lungă se află în repaus pe o suprafaţă orizontală fără frecări. Un corp mic cu masa m = 2 kg, aflat la un capăt al scândurii, primeşte printr-o lovitură o viteză $v_0 = 10$ m/s, orizontală spre celălalt capăt. Corpul se opreşte, faţă de scândură, după un timp $t_1 = 1{,}6$ s.



Considerând $g = 10\ m/s^2$ să se afle:
a) viteza maximă a scândurii faţă de pământ; b) coeficientul de frecare dintre corp şi scândură; c) distanţa maximă parcursă de corp faţă de scândură.

16 F

Cu ce viteză trebuie aruncată vertical în jos o minge, pentru ca după ciocnirea perfect elastică cu podeaua, să urce cu Δh = 5m mai sus faţă de punctul de aruncare?

17

Un ciocan de masă m = 1 kg loveşte o nicovală fixă cu viteza v = 2 m/s şi ricoşează înapoi cu o viteză de n = 2 ori mai mică. Să se afle variaţia impulsului ciocanului şi căldura degajată prin ciocnire.

18 F

Un automobil cu masa de 1800 kg, care se deplasează pe o şosea spre est cu viteza de 60 km/h, se ciocneşte de un camion cu masa 4 t, care traversează şoseaua, deplasându-se spre sud cu viteza de 25 km/h. Dacă în urma ciocnirii maşinile se cuplează care este modulul şi direcţia vitezei lor imediat după ciocnire?

19 F

Un obuz de masă M = 18 kg aflat iniţial în repaus explodează în două fragmente având raportul maselor m_1/m_2 = 1/2. Dacă energia cinetică rezultată prin explozie este $E_c = 720$ kJ, aflaţi viteza fiecărui fragment imediat după explozie.

20

Un sportiv de masă m = 70 kg cade liber de la înălţimea h = 5 m şi la impactul cu solul dur, se ghemuieşte coborându-şi centrul de greutate cu d = 50 cm. Considerând $g = 10\ m/s^2$ să se afle forţa medie exercitată de sportiv asupra solului în timpul ghemuirii.

21 F

O sferă din lemn de masă M = 1 kg este aşezată pe un suport inelar. De jos în sus se trage un glonţ de masă $m_0 = 20$ g şi viteză $v_0 = 400$ m/s. Glonţul străpunge sfera care se ridică până la înălţimea h = = 1,8 m. Considerând $g = 10\ m/s^2$, să se afle la ce înălţime va urca glonţul.

22 F

Două corpuri de masă m = 1 kg fiecare se mişcă pe direcţii perpendiculare. Ştiind că, prin ciocnirea lor plastică, se produce căldura Q = 25 J, să se afle viteza lor după ciocnire. Ce impuls total şi ce energie cinetică au avut corpurile înainte de ciocnire?

23 F

Două bile de mase $m_1 = 2$ kg şi $m_2 = 1$ kg se mişcă pe un plan orizontal cu vitezele $v_1 = 2$ m/s şi $v_2 = 3$ m/s pe direcţii perpendiculare. După ciocnire a doua bilă se opreşte. Să se afle viteza primei bile după ciocnire şi căldura degajată.

24 F

O particulă de masă m şi viteză v_0 ciocneşte perfect elastic o altă particulă de masă M aflată în repaus. Prima particulă ricoşează după ciocnire pe o direcţie perpendiculară pe $\vec{v}_0$. Să se afle vitezele ambelor particule după ciocnire şi direcţia mişcării lui M.

TEST

I

Alegeţi varianta corectă şi completaţi enunţurile:

a) Unitatea de măsură pentru impuls în S.I. este . . ..

b) Forţele interne *pot/nu pot* modifica impulsul total al unui sistem de puncte materiale.

c) Direcţia vectorului impuls este . . . la traiectorie.

d) Variaţia impulsului unui punct material, într-un anumit interval de timp, este egală cu . . . ce acţionează asupra punctului material.

e) Impulsul unui corp în mişcare circulară uniformă *este/nu este* constant. 1,5p

II

Alegeţi răspunsurile corecte:

Impulsul total al unui sistem de puncte materiale se conservă atunci când:

a) rezultanta tuturor forţelor exterioare ce acţionează asupra sistemului este nulă;

b) vitezele punctelor materiale nu-şi modifică direcţia;

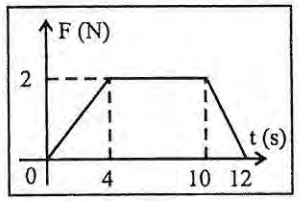
c) sistemul este izolat;

d) între punctele materiale care formează sistemul se exercită numai forţe conservative;

e) sistemul se află iniţial în repaus. 1,5p

III

Un corp de masă m = 1 kg porneşte din repaus. Asupra lui acţionează o forţă rezultantă a cărei variaţie este reprezentată în graficul alăturat.



Viteza corpului după $\Delta t = 12$ s va fi:

a) 15 m/s b) 18 m/s c) 24 m/s 2p

IV

Două corpuri de mase $m_1 = 2$ kg şi $m_2 = 3$ kg şi viteze $v_1 = 3$ m/s şi respectiv $v_2 = -4$ m/s, se ciocnesc frontal.

A. Considerând ciocnirea plastică, viteza după ciocnire şi căldura degajată sunt:

a) $v' = +1{,}2$ m/s şi $Q = 36$ J b) $v' = -1{,}8$ m/s şi $Q = 24$ J

c) $v' = -1{,}2$ m/s şi $Q = 29{,}4$ J d) $v' = -2{,}4$ m/s şi $Q = 32{,}6$ J

B. Considerând ciocnirea perfect elastică, vitezele corpurilor după ciocnire sunt:

a) $v'_1 = -4{,}8$ m/s şi $v'_2 = 2{,}2$ m/s b) $v'_1 = 2{,}4$ m/s şi $v'_2 = 4{,}6$ m/s

c) $v'_1 = 4{,}8$ m/s şi $v'_2 = -2{,}2$ m/s d) $v'_1 = -5{,}4$ m/s şi $v'_2 = 1{,}6$ m/s 2,5p

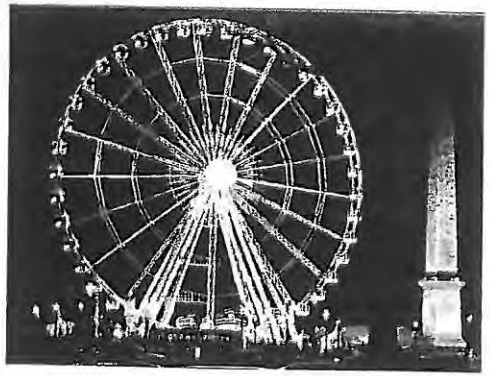
V

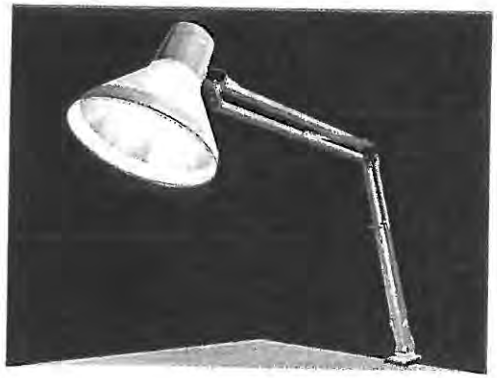
O bilă în mişcare cu viteza $\vec{v}_0$ ciocneşte *perfect elastic* nefrontal o altă bilă de aceeaşi masă aflată în repaus. Să se arate că după ciocnire bilele se mişcă pe direcţii perpendiculare. 1,5p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute.

4

ELEMENTE DE STATICĂ





4. ELEMENTE DE STATICĂ

Legile de mişcare studiate în capitolele anterioare au fost stabilite pentru puncte materiale. Sunt situaţii în care corpurile nu mai pot fi considerate ca puncte materiale şi trebuie să ţinem cont de forma, dimensiunile şi distribuţia substanţei din care sunt alcătuite. În acest caz, considerăm *corpul ca fiind alcătuit dintr-un sistem de puncte materiale.*

Dacă distanţa dintre orice pereche de puncte materiale ale corpului rămâne aceeaşi, numim corpul *solid rigid* (sau pentru simplitatea exprimării *solid*).

Din punct de vedere fizic, noţiunea de solid rigid constituie o idealizare care în multe cazuri, oferă o bună aproximare a realităţii. Pot fi considerate solide rigide, o grindă metalică, un panou de beton, un autoturism etc.

În condiţii specifice, legile mecanicii se pot aplica şi solidului rigid. Trebuie ţinut însă cont că, sub acţiunea forţelor, mişcarea solidului rigid este mai complicată decât a unui punct material.

Mişcarea de *translaţie* şi cea de *rotaţie* (în jurul unei axe) sunt tipuri de mişcări simple ale solidului rigid.

Când solidul rigid este în repaus spunem că el este în *echilibru static.*

Statica este acea parte a mecanicii care studiază echilibrul solidului rigid sub acţiunea forţelor exterioare care acţionează asupra lui.

4.1 MIŞCAREA DE TRANSLAŢIE. MIŞCAREA DE ROTAŢIE

Un corp solid are o **mişcare de translaţie** dacă oricare ar fi două puncte ale solidului, segmentul care le uneşte îşi păstrează direcţia în timpul mişcării.

Mişcarea unei maşini pe o şosea rectilinie (fig. 4.1) şi mişcarea cabinei unui teleferic (fig 4.2) sunt mişcări de translaţie.

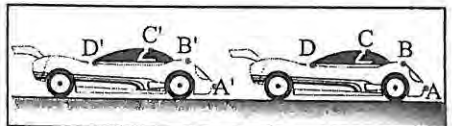


Fig. 4.1

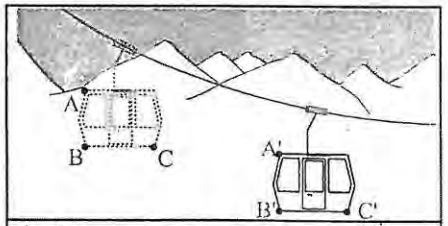


Fig. 4.2

| Daţi exemple de corpuri solide care au mişcări de translaţie.

În mişcarea de translaţie toate punctele solidului au traiectorii, viteze şi acceleraţii identice şi de aceea această mişcare poate fi descrisă de mişcarea unui singur punct material ce aparţine corpului.

Un corp solid are o **mişcare de rotaţie** în jurul unei axe, atunci când orice punct al său descrie un arc de cerc cu centrul pe axă (numită axă de rotaţie).

Când deschidem o uşă, aceasta se roteşte în jurul axei verticale a balamalelor.

Oricare puncte M şi M' descriu arce de cerc situate în plane orizontale (fig. 4.3).

La orice rotaţie planele ce conţin cercurile descrise de punctele corpului sunt perpendiculare pe axa de rotaţie.

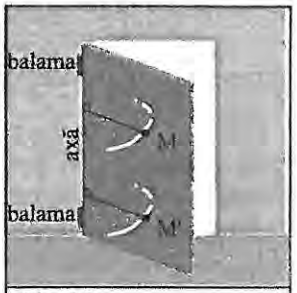


Fig. 4.3

Mişcarea de rotaţie se numeşte *uniformă* dacă valorile vitezei liniare sau unghiulare (în raport cu axa) sunt, pentru fiecare punct al corpului, constante în timp.

În natură mişcările corpurilor nu sunt totdeauna mişcări de simplă translaţie sau simplă rotaţie.

Exemplu:

Dacă o maşină se deplasează pe o şosea rectilinie cu viteza constantă $\vec{v}$ (fig. 4.4), atunci o roată are atât o mişcare de translaţie, cât şi una de rotaţie în jurul axei sale.

Punctul A de pe roată, aflat în contact cu asfaltul, are faţă de şosea viteză momentană nulă (dacă roata nu patinează) şi punctul B (diametral opus punctului A) are faţă de şosea viteza momentană $\vec{v}_B = 2\vec{v}$.

Atât punctul A, cât şi punctul B au faţă de axa roţii viteze egale în modul, iar viteza lor unghiulară (faţă de axă) este: $\omega = v/r$, r = raza roţii.

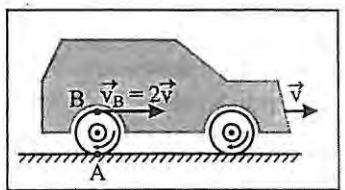


Fig. 4.4

Axa roţii este fixă faţă de maşină, dar este mobilă faţă de şosea.

Traiectoriile punctelor A şi B sunt cercuri faţă de axă, dar sunt curbe mai complicate (cicloide) faţă de şosea.

Alte părţi ale maşinii (geamuri, faruri, scaune etc.) au mişcări de translaţie (faţă de şosea) şi traiectorii rectilinii.

Aşezaţi un disc metalic perforat (din trusa de fizică) pe o suprafaţă plană lucioasă (frecarea este neglijabilă) şi acţionaţi asupra lui cu o forţă $\vec{F}_1$ (fig.4.5). Urmăriţi mişcarea discului. Discul are mişcare de translaţie sau de rotaţie?

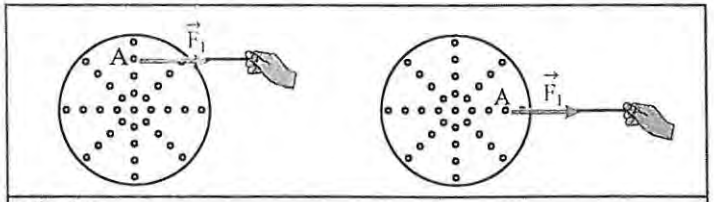


Fig. 4.5

Sub acţiunea forţei $\vec{F}_1$ discul aflat iniţial în repaus se va mişca spre dreapta (translaţie) şi simultan se va roti în sensul acelor de ceasornic.

Atunci când asupra unui corp acţionează simultan mai multe forţe, efectele lor se pot compensa, rezultatul fiind acela că nu există schimbare în mişcarea de translaţie. În acest caz spunem că acel corp este în *echilibru de translaţie*.

4.2 ECHILIBRUL DE TRANSLAŢIE. CONDIŢII DE ECHILIBRU

O carte aşezată pe masă este în repaus deoarece greutatea ei, $\vec{G}$, este compensată de o forţă, $\vec{N}$, exercitată de masă (reacţiunea forţei $\vec{F}$ cu care cartea apasă pe masă). În acest caz cartea este în *echilibru static*.

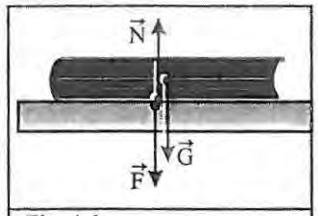


Fig. 4.6

Un paraşutist, sub acţiunea propriei greutăţi, cade spre Pământ într-o mişcare care la început este uniform accelerată. Datorită rezistenţei aerului apare o forţă, depinzând de viteză, ce se opune mişcării. La un moment dat această forţă compensează complet greutatea şi paraşutistul se va mişca rectiliniu uniform (spre Pământ). Paraşutistul este (din acest moment) în *echilibru dinamic*.

Un solid este în **echilibru de translaţie** dacă nu are mişcare de translaţie (echilibru static) sau are mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă (echilibru dinamic).

Când solidul rigid are numai mişcare de translaţie el poate fi redus la un punct material astfel încât putem spune că:

Un solid este în **echilibru de translaţie** dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra lui este zero.

Condiţia de echilibru de translaţie:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{0} \qquad (4.1)$$

Verificaţi printr-un experiment, sugerat de imaginea alăturată (fig. 4.7), că atunci când asupra unui corp solid acţionează forţe concurente care au rezultanta nulă, corpul se află în echilibru de translaţie.

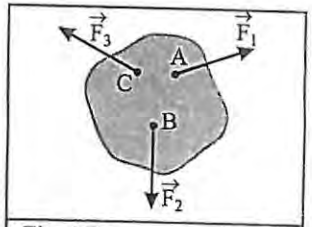


Fig. 4.7

Observaţie:

➢ Echilibrul de translaţie este independent de poziţia punctelor de aplicaţie ale forţelor care acţionează asupra corpului.

Sunt situaţii când asupra corpului solid acţionează două forţe paralele, egale ca modul şi de sens opus (cuplu de forţe) şi deci rezultanta cuplului este zero; corpul nu este în echilibru. Volanul unei maşini (fig. 4.8), un robinet, ghidonul unei biciclete, tirbuşonul (fig. 4.9) sunt exemple de corpuri care se rotesc sub acţiunea unui cuplu de forţe.

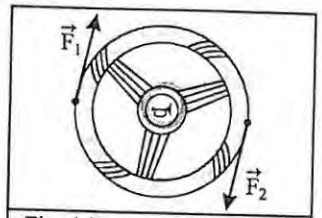


Fig. 4.8

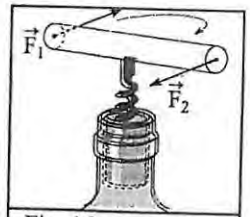


Fig. 4.9

4.3 ECHILIBRUL DE ROTAŢIE

4.3.1 EFECTUL DE ROTAŢIE AL UNEI FORŢE

Lucraţi în grup.

Realizaţi un montaj alcătuit dintr-un disc cu raza de R = 10 cm (din lemn sau metal cu grosimea de aprox. 4 mm) care se poate roti în jurul unei axe orizontale ce trece prin centrul său (fig. 4.10).

În punctul C, situat la capătul unui diametru orizontal al discului, prindeţi un fir de aprox. 10 cm lungime legat la capătul unui resort (punctul A) cu constanta elastică k (k ≅ 20 N/m). Capătul B al resortului este fixat de un suport.

Iniţial resortul este nedeformat (relaxat).

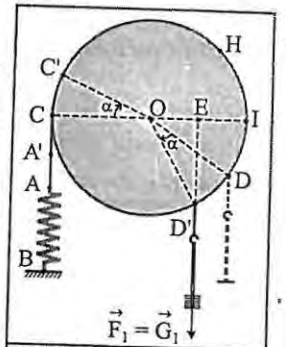


Fig. 4.10

Într-un punct de la periferia discului (punctul D) legați cu un fir ușor un cârlig cu suport pentru discuri crestate. Puneți discuri crestate pe suport și observați că *discul se rotește* pe măsură ce numărul discurilor crestate crește.
La un moment dat constatați că verticala punctului de susținere a discurilor se află la distanța OE = R/2 față de centrul discului.
În acest moment masa discurilor crestate (cu suport) este m_1 și alungirea resortului AA' = $\Delta\ell$ (egală cu lungimea arcelor CC' și DD'), iar discul este rotit cu unghiul α. Punctele A',C',D' reprezintă pozițiile punctelor materiale A,C,D după ce discul s-a rotit.

Repetați experimentul folosind un fir cu o lungime mai mare prins în alt punct (punctul H) al discului. Din H, firul "urmărește" circumferința discului până în I, după care este vertical având direcția tangentei la disc în punctul I (fig. 4.11).

Puneți discuri crestate pe cârlig și constatați că puteți produce aceeași rotire a discului, cu unghiul α și aceeași alungire $\Delta\ell$ a resortului când masa discurilor crestate este $m_2 = m_1/2$, deci cu o forță ($F_2 = m_2 g$) de două ori mai mică decât în primul caz.

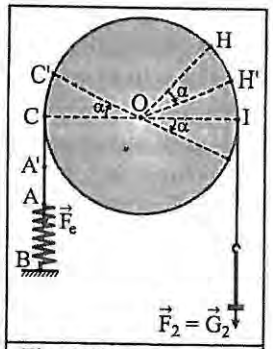


Fig. 4.11

În concluzie, *efectul de rotație al unei forțe depinde și de modulul forței și de orientarea ei în raport cu axa în jurul căreia se poate roti corpul.*
Pentru a măsura efectul de rotație al unei forțe vom defini mărimea fizică numită *momentul forței.*

4.3.2 MOMENTUL FORȚEI

NOȚIUNI DE MATEMATICĂ

Produsul vectorial a doi vectori

Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează între ei unghiul α.
Prin *produsul vectorial* al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se obține vectorul: $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$
care are:
- *modulul*: $v = |\vec{v}| = ab\sin\alpha$
- *direcția*: perpendiculară pe planul $(\vec{a}, \vec{b})$
- *sensul*: se află cu regula burghiului drept (tirbușonului).

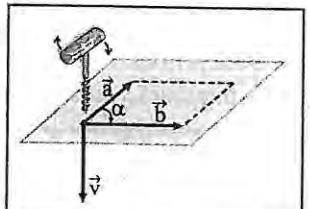


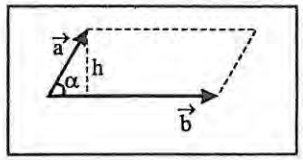
Fig. 4.12

Regula burghiului drept:
Vectorul $\vec{v}$ are sensul de înaintare al unui burghiu drept, care, așezat perpendicular pe planul determinat de cei doi vectori, se rotește în sensul în care s-ar roti primul vector spre cel de-al doilea pe drumul cel mai scurt.

Proprietățile produsului vectorial:
- produsul vectorial este anticomutativ: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$
- produsul vectorial este distributiv față de adunare și scădere:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c}$$

Geometric: $a\sin\alpha = h$
$v = |\vec{v}| = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ este numeric egal cu aria paralelogramului format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.
$v = ab = v_{max}$, dacă $\vec{a} \perp \vec{b}$;
$v = 0$, dacă $\vec{a} \parallel \vec{b}$



MOMENTUL FORȚEI FAȚĂ DE UN PUNCT

Asupra unui solid acționează forța $\vec{F}$ (fig. 4.13). Considerăm un punct din spațiu O (numit pol) și vectorul de poziție al punctului de aplicație A al forței $\vec{F}$ în raport cu polul O.

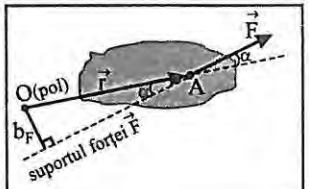


Fig. 4.13

Momentul forței $\vec{F}$ față de polul O este mărimea fizică vectorială definită prin relația:

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad (4.2)$$

Unitatea de măsură a momentului forței în S.I. este: $[M]_{S.I.} = N \cdot m$
Caracteristicile momentului forței sunt:
- *modulul*: $M = rF\sin\alpha = F \cdot b_F$

unde b_F este brațul forței (distanța de la pol la suportul forței);
- *direcția*: perpendiculară pe planul format de vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$;
- *sensul* este dat de regula burghiului drept.

Observații:
➢ Orice dreaptă din spațiu perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$ poate fi considerată suport al vectorului $\vec{M}_{\vec{F},O}$ și orice punct de pe suport poate fi punct de aplicație al vectorului $\vec{M}_{\vec{F},O}$.

➢ Momentul forței depinde de polul ales. Schimbând polul se modifică și modulul și orientarea lui. Dacă polul este pe suportul forței momentul este nul.

MOMENTUL FORȚEI FAȚĂ DE O AXĂ

O forță $\vec{F}$ acționează asupra unui solid (fig. 4.14). Pentru a defini *momentul forței* $\vec{F}$ *față de axă* (Δ) considerăm planul ce trece prin punctul de aplicație al forței perpendicular pe axă (Δ), pe care o intersectează în punctul O.

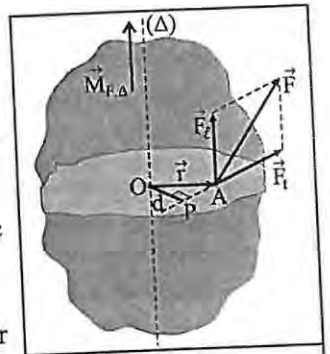


Fig. 4.14

Descompunem forța $\vec{F}$ în două componente reciproc perpendiculare:

- $\vec{F}_\ell$ (longitudinală, paralelă cu axa (Δ));
- $\vec{F}_t$ (transversală, conținută în planul perpendicular pe (Δ)).

OP este perpendiculara dusă din O pe suportul componentei $\vec{F}_t$, iar d = OP se numește **brațul** forței $\vec{F}_t$ față de axă (Δ).

Momentul forței față de axă (Δ) este:

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F},\Delta} = \vec{r} \times \vec{F}_t} \qquad (4.3)$$

cu modulul: $M_{\vec{F},\Delta} = F_t \cdot d$

Aplicând regula burghiului drept, pentru cazul analizat, se obține sensul vectorului $\vec{M}_{\vec{F},\Delta}$ indicat în figura 4.14 (paralel cu axa Δ).

Justificați de ce componenta $\vec{F}_\ell$ a forței $\vec{F}$ are momentul față de axă (Δ) nul:

$$\vec{M}_{\vec{F}_\ell,\Delta} = \vec{0}$$

În general:
Când suportul unei forțe care acționează asupra unui solid rigid este paralel cu axa sau o intersectează, momentul forței față de acea axă este nul și solidul nu se rotește.

Volanul unui autoturism (fig. 4.15) se rotește atunci când se acționează asupra lui cu forța $\vec{F}_1$? Dar când se acționează cu forța $\vec{F}_2$? Justificați răspunsul.

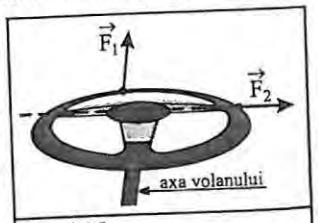


Fig. 4.15

Un disc metalic cu greutatea $\vec{G}$ având axul în centrul lui de greutate (fig. 4.16) se rotește atunci când asupra lui acționează forța $\vec{F}_1$ (cu punctul de aplicație în A). Acționând asupra discului, în punctul B, cu forța $\vec{F}_2$ acesta se rotește în sens invers. Momentele forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ față de punctul O sunt $\vec{M}_{\vec{F}_1,O}$ respectiv $\vec{M}_{\vec{F}_2,O}$.

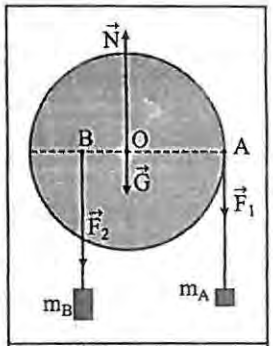


Fig. 4.16

Verificați printr-un experiment că discul rămâne în echilibru (repaus) atunci când momentele celor două forțe sunt egale și de sensuri opuse:

$$\vec{M}_{\vec{F}_1,O} = -\vec{M}_{\vec{F}_2,O} \quad \text{adică} \quad F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB$$

sau: $\vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O} = \vec{0}$

Asupra discului mai acționează și greutatea lui, $\vec{G}$, și reacțiunea axului, $\vec{N}$, dar momentele acestor forțe în raport cu axul sunt nule, dreapta lor suport trecând prin acesta ($\vec{M}_{\vec{G},O} = \vec{M}_{\vec{N},O} = \vec{0}$) și ele nu pot influența rotația discului.
În concluzie:
Pentru ca discul să fie în repaus trebuie ca momentul total al forțelor care acționează asupra lui să fie nul.

$$\vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O} + \vec{M}_{\vec{G},O} + \vec{M}_{\vec{N},O} = \vec{0}$$

Spunem în acest caz că discul este în *echilibru de rotație*.

Care este condiția ca discul să se rotească uniform în jurul axului său?

Un solid rigid este în **echilibru de rotație** în raport cu o axă când este în repaus sau se rotește uniform în jurul axei.

Pentru a fi îndeplinite aceste condiții este necesar și suficient ca momentul rezultant al forțelor aplicate solidului față de axa de rotație să fie nul.
Condiția de echilibru de rotație:

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F}_1,\Delta} + \vec{M}_{\vec{F}_2,\Delta} + \ldots\ldots + \vec{M}_{\vec{F}_n,\Delta} = \vec{0}} \qquad (4.4)$$

În practică, un solid rigid poate avea și mișcare de translație și mișcare de rotație. Pentru ca solidul să fie în echilibru, trebuie îndeplinite simultan condițiile (4.1) și (4.4):

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{0} \qquad (4.1)'$$

$$\vec{M}_{\vec{R},\Delta} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{\vec{F}_k,\Delta} = \vec{0} \qquad (4.4)'$$

Demonstrăm că în cazul în care asupra corpului solid acționează n forțe concurente pentru ca acesta să fie în echilibru (de translație și de rotație) este suficientă numai condiția (4.4)'.

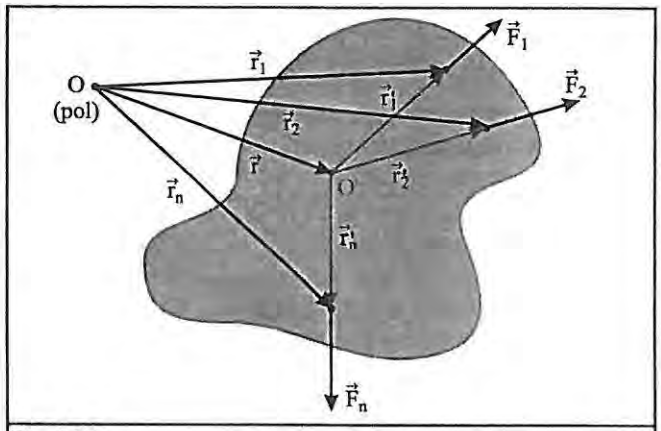


Fig. 4.17

Momentul rezultantei forțelor față de polul O (fig. 4.17) este:

$$\vec{M}_{\vec{R},O} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{\vec{F}_k,O} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r} + \vec{r}'_k) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}'_k \times \vec{F}_k$$

dar, $\vec{r}'_k \times \vec{F}_k = \vec{0}$, deoarece $\vec{r}'_k \parallel \vec{F}_k$

deci: $$\vec{M}_{\vec{R},O} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_k = \vec{r} \times \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{0}$$

În concluzie, *în cazul în care asupra solidului acționează forțe concurente a căror rezultantă este nulă se poate spune că solidul se reduce la un punct material.*

Observație:

➢ Dacă $\vec{R} = \vec{0}$, condiția $\vec{M}_{\vec{R}} = \vec{0}$ poate fi pusă în raport cu orice punct al corpului (chiar dacă prin acel punct nu trece o axă de rotație).

La rezolvarea problemelor vom ține cont că:

• Dacă forțele sunt coplanare se consideră fie un pol în planul forțelor, fie o axă perpendiculară pe planul forțelor. Alegând convenabil polul sau axa se pot elimina momentele forțelor necunoscute sau care nu ne interesează în situația respectivă.

• Scalar condiția de echilibru de rotație se scrie egalând suma modulelor momentelor forțelor care tind să rotească corpul față de axă (pol) într-un sens cu suma modulelor momentelor forțelor ce tind să-l rotească în sens invers.

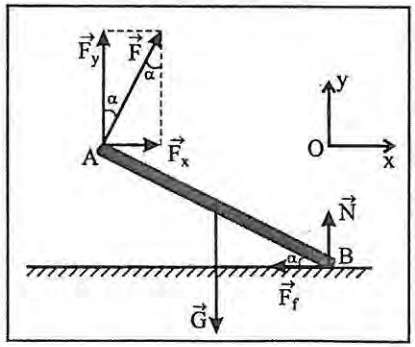
La aplicarea condiției de echilibru de translație, punctele de aplicație ale forțelor nu sunt importante, dar în cazul echilibrului de rotație poziția acestora este importantă, putând influența direct valorile momentelor forțelor.

Problemă rezolvată

O scândură omogenă de grosime mică în comparație cu lungimea ei este așezată orizontal pe sol. Un muncitor ridică de la un capăt acționând permanent cu o forță orientată perpendicular pe scândură, rotind-o uniform în jurul capătului rămas pe sol, până când o aduce în poziție verticală. Dacă scândura are greutatea G, să se exprime toate celelalte forțe care acționează asupra ei ca funcție de unghiul α făcut de scândură cu orizontala. Considerând că scândura nu lunecă pe sol arătați între ce limite variază forțele în timpul ridicării.

Rezolvare:

Reprezentăm scândura când face unghiul α cu orizontala și forțele ce acționează asupra ei.



Vom arăta că putem obține rezultate identice considerând mai întâi polul în A și apoi în B.

Când polul este în A, condițiile de echilibru sunt:

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{0}$$

$$\vec{M}_G + \vec{M}_N + \vec{M}_{F_f} = \vec{0}$$

Proiectăm forța $\vec{F}$ pe axele indicate în figură, iar relația momentelor o transcriem scalar observând că față de A, forțele $\vec{G}$ și $\vec{F}_f$ tind să rotească scândura în sens opus sensului în care tinde să o rotească forța $\vec{N}$:

$$\begin{array}{l} \text{pe Ox: } F_x - F_f = 0 \\ \text{pe Oy: } F_y - G + N = 0 \\ \qquad M_G + M_{F_f} = M_N \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} F\sin\alpha = F_f \\ N = G - F\cos\alpha \\ G\dfrac{\ell}{2}\cos\alpha + F_f \cdot \ell \cdot \sin\alpha = N \cdot \ell \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem:

$$F = \frac{G}{2}\cos\alpha; \quad F_f = \frac{G}{2}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{G}{4}\sin 2\alpha; \quad N = \frac{G}{2}(2 - \cos^2\alpha) = \frac{G}{2}(1 + \sin^2\alpha)$$

Când polul este în B condițiile de echilibru sunt:

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{0}$$

$$\vec{M}_F + \vec{M}_G = \vec{0}$$

Proiecțiile forțelor pe axe sunt:

Ox: $F\sin\alpha - F_f = 0$

Oy: $F\cos\alpha - G + N = 0$

$$M_F = M_G \Rightarrow \quad F \cdot \ell = G\frac{\ell}{2}\cos\alpha \Rightarrow F = \frac{G}{2}\cos\alpha$$

$$F_f = F\sin\alpha = \frac{G}{2}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{G}{4}\sin 2\alpha$$

$$N = G - F\cos\alpha = G - \frac{G}{2}\cos^2\alpha = \frac{G}{2}(2-\cos^2\alpha) = \frac{G}{2}(1+\sin^2\alpha)$$

Varianta a doua este mai rapidă deoarece alegând polul în B am eliminat momentele a două forțe necunoscute ($\vec{F}_f$ și $\vec{N}$).

Să analizăm evoluția fiecărei forțe în timpul rotirii uniforme a scândurii de la $\alpha_i = 0°$ la $\alpha_f = 90°$.

$$F(\alpha_i) = F(0) = \frac{G}{2} \quad \text{și} \quad F(\alpha_f) = F(90^0) = 0$$

$$N(\alpha_i) = N(0) = \frac{G}{2} \quad \text{și} \quad N(\alpha_f) = N(90^0) = G$$

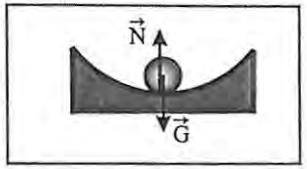
$$F_f(\alpha_i) = F_f(0) = 0; \quad F_f(45°) = \frac{G}{4}\text{(maximă)}; \quad F_f(\alpha_f) = F_f(90°) = 0$$

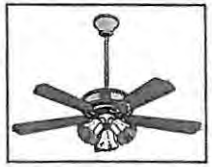
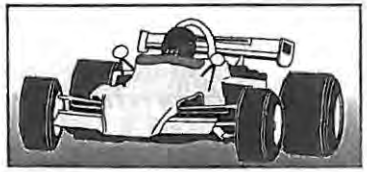
Observăm că forța de împingere este maximă la începutul ridicării și descrește până la anulare când scândura ajunge verticală, normala crește de la G/2 la G, iar forța de frecare crește de la zero la G/4 și scade apoi până la anulare.
Înainte ca muncitorul să apuce capătul A al scândurii, normala $\vec{N}$ era egală ca modul cu greutatea G și avea punctul de aplicație la mijlocul scândurii, deci valoarea inițială N(0) = G/2 este considerată cea de la începutul ridicării, când scândura începe rotirea în jurul capătului B.

4.3.3 ECHILIBRUL CORPURILOR ȘI ENERGIA POTENȚIALĂ

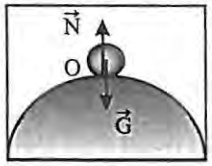
Analizăm legătura dintre starea de echilibru a unui corp și energia sa potențială.

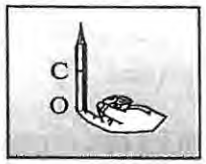
Un corp sau un sistem fizic este în **echilibru stabil** dacă la mici deplasări față de poziția de echilibru, el revine de la sine în această poziție.



Un corp sau sistem fizic se află în **echilibru instabil** dacă la mici deplasări față de poziția de echilibru, el nu revine de la sine în această poziție.





Considerăm o tijă de masă neglijabilă, dar rigidă având sudată o bilă mică de greutate G la un capăt și la celălalt capăt un mic inel care se poate roti în plan vertical în jurul axului O orizontal.

Corpul rigid este constituit din tijă și bilă (fig. 4.18). Asupra acestui rigid va acționa cuplul de forțe format de greutatea $\vec{G}$ în jos și normala $\vec{N}$ exercitată de ax.

Când bila este în punctul A, tija este verticală: $\vec{N} + \vec{G} = 0$ și $\vec{M}_c = \vec{0}$, deci tija este în echilibru.
Dacă bila este adusă în punctul B și eliberată, ea nu se întoarce de la sine în A, ci se va roti către poziția C și apoi spre D. Deci, în A, unde *energia potențială* era *maximă, echilibrul* sistemului tijă-bilă era *instabil*.

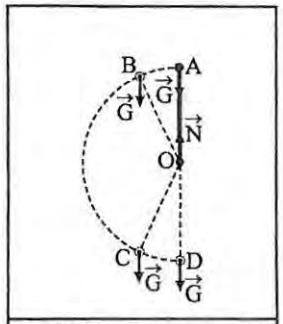


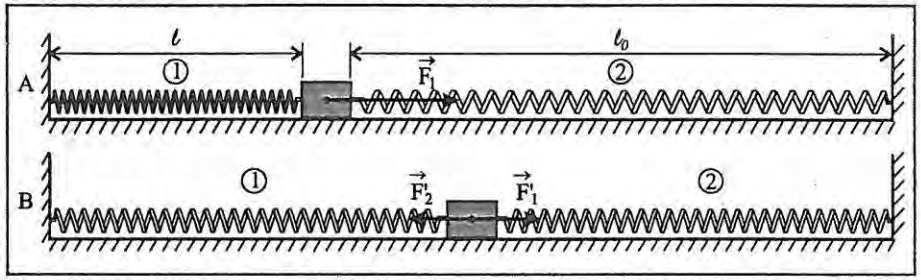
Fig. 4.18

Considerăm acum că bila se află în repaus în punctul D. Ea este în echilibru de rotație pentru că $\vec{N} + \vec{G} = \vec{0}$ și $\vec{M}_c = \vec{0}$ (forțele $\vec{N}$ și $\vec{G}$ având același suport). Echilibrul din D este *stabil* pentru că, deplasând puțin bila (de exemplu în C) și eliberând-o, ea va reveni de la sine în D (sub acțiunea cuplului de forțe $\vec{N}$ și $\vec{G}$ al cărui moment e nenul). Constatăm că *starea de echilibru stabil* este cea în care sistemul are *energia potențială minimă*.

Bila lăsată liberă în orice altă poziție se va opri în poziția de echilibru stabil (D) și de energie potențială minimă.

Am analizat un sistem cu posibilitate de rotire în câmp gravitațional. Se întâmplă oare tot așa și în câmpul altor forțe conservative?

Să analizăm cazul unui corp prins de două resorturi orizontale identice (aceeași lungime în stare relaxată și aceeași constantă elastică k fiecare).



Considerăm că în starea inițială, A, resortul (1) este comprimat pe distanța $x = \ell_0 - \ell$, iar resortul (2) este relaxat. În acest moment energia potențială totală a sistemului este:

$$E_{pA} = \frac{k}{2}x^2$$

În starea inițială, corpul dintre resorturi nu este în echilibru decât dacă este ținut (de exemplu, cu mâna). Ce se va întâmpla dacă lăsăm corpul liber ? Sub acțiunea forței elastice a primului resort, acesta se va deplasa spre dreapta, comprimând resortul al doilea. Presupunând că mișcarea corpului se face cu frecări foarte mici (numai cu aerul), după un timp, corpul se va opri în acea poziție în care rezultanta forțelor va fi nulă (starea B), deci $F_1' = F_2' = kx/2$, fiecare resort fiind comprimat cu x/2. În această poziție energia potențială totală a sistemului este:

$$E_{p_B} = \frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{kx^2}{4}$$

Aceasta este energia potențială cea mai mică pe care o poate avea sistemul. Dacă, de exemplu, corpul ar fi deplasat spre dreapta, cu distanța y, comprimarea resortului (2) ar crește de la $\frac{x}{2}$ la $\frac{x}{2}+y$ și energia potențială ar deveni:

$$E_p(y) = \frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}+y\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}-y\right)^2 = ky^2 + \frac{kx^2}{4}$$

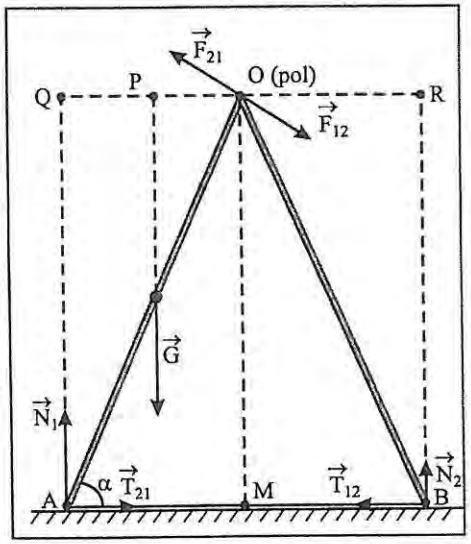
Minimul funcției $E_p(y)$ se obține pentru $y = 0$.

Un corp, sau în general un sistem fizic, tinde spre acea stare în care energia sa potențială să fie minimă, stare (poziție) în care echilibrul sistemului este stabil.

Problemă rezolvată

O scară dublă de masă neglijabilă articulată sus, are capetele inferioare legate printr-un fir. Un om de greutate G = 800 N *urcă până la mijlocul scării. Dacă unghiul dintre fiecare latură a scării și podea este* $\alpha = 60°$ *și neglijăm frecările scării cu podeaua, să se afle toate forțele care acționează asupra părților scării.*

Rezolvare:



Considerăm că omul și partea stângă a scării formează un singur corp de greutate $\vec{G}$. Forțele cu care interacționează părțile scării sunt:

$\vec{F}_{21}$ și $\vec{F}_{12}$ (prin intermediul articulației);

$\vec{T}_{21}$ și $\vec{T}_{12}$ (prin intermediul firului).

Aceste forțe sunt forțe interne și suma fiecărei perechi este nulă (conform principiului al III-lea al mecanicii).

Condiția de echilibru de *translație* pentru întreaga scară:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = \vec{0}, \text{ sau scalar:}$$

$$N_1 + N_2 - G = 0 \qquad (1)$$

Condiția de echilibru de *rotație* pentru fiecare parte a scării, față de polul O:

$$\vec{M}_{N_1} + \vec{M}_G + \vec{M}_{T_{21}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{N_2} + \vec{M}_{T_{12}} = \vec{0} \qquad \text{deoarece față de O: } \vec{M}_{F_{21}} = \vec{M}_{F_{12}} = \vec{0}$$

Scalar: $\begin{cases} M_G + M_{T_{21}} = M_{N_1} \\ M_{N_2} = M_{T_{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G \cdot OP + T \cdot OM = N_1 \cdot OQ \\ N_2 \cdot OR = T \cdot OM \end{cases}$

$$\begin{cases} G \cdot (\ell/2)\cos\alpha + T\ell\sin\alpha = N_1 \cdot \ell\cos\alpha \\ N_2 \cdot \ell\cos\alpha = T\ell\sin\alpha \end{cases}$$

Ținând cont de relația (1) și rezolvând sistemul se obțin:

$N_1 = 3G/4 = 600$ N $\qquad N_2 = G/4 = 200$ N $\qquad T = \text{ctg}\alpha G/4 = 200\sqrt{3}/3$ N

Pentru ca partea dreaptă a scării să fie în echilibru de translație trebuie ca $\vec{F}_{12}$ să fie egală și de sens opus cu rezultanta forțelor $\vec{N}_2$ și $\vec{T}_{12}$:

$$F_{12} = F_{21} = \sqrt{N_2^2 + T^2} = \frac{G}{4\sin\alpha} = 400\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ N}$$

Energia cinetică a Pământului

Pământul are o mişcare complexă:

- în jurul Soarelui, pe o traiectorie aproximativ circulară cu raza de 150 milioane km, parcursă complet în timp de un an (365,25 zile) – *mişcare de translaţie*;
- în jurul axei sale, considerată pe direcţia polul nord-polul sud, făcând un tur complet într-o zi siderală (86140 s) – *mişcare de rotaţie*.

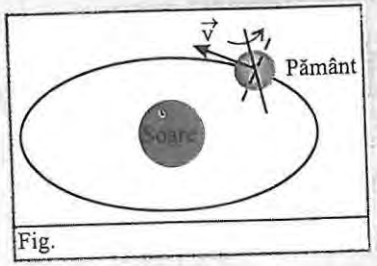


Fig.

Fiind în mişcare Pământul are deci, energie cinetică:

$$E_c \text{ (de translaţie)} \approx 2{,}7 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

$$E_c \text{ (de rotaţie)} \approx 2{,}7 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

Energia cinetică a Pământului este suma acestor energii, ceea ce înseamnă că el are o energie considerabilă.

Putem spune că Pământul are, sub formă de energie cinetică, un stoc foarte important de energie.

PROBLEME

1

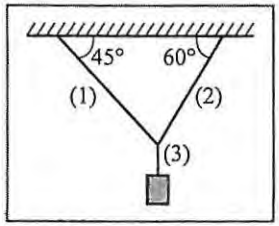
Asupra unui punct material acţionează două forţe ale căror direcţii formează un unghi $\alpha = 120°$. Ştiind modulele forţelor $F_1 = 10$ N şi $F_2 = 20$ N, să se afle modulul rezultantei precizând şi orientarea ei.

2

Asupra unui punct material acţionează şase forţe coplanare de module $F_1 = 1$ N, $F_2 = 2$ N, ..., $F_6 = 6$ N. Unghiul dintre $\vec{F_1}$ şi $\vec{F_2}$ este congruent cu cel dintre $\vec{F_2}$ şi $\vec{F_3}$, ... şi cu cel dintre $\vec{F_6}$ şi $\vec{F_1}$. Să se afle modulul rezultantei acestor forţe precizând şi orientarea ei.

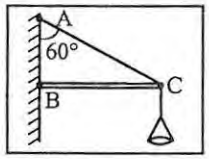
3

Să se calculeze tensiunile din firele sistemului reprezentat în figură cunoscând greutatea corpului legat de firul vertical, G = 20 N.



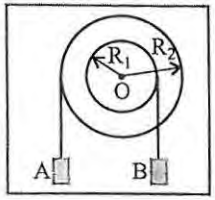
4

O lampă de greutate G = 40 N este suspendată ca în figură. Aflaţi momentele greutăţii lămpii faţă de punctele A, B şi C ştiind că AC = 1 m.



5

Pentru sistemul reprezentat în figură care se poate roti fără frecări în jurul axului O se cunosc $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 20$ cm, $G_A = 20$ N şi $G_B = 35$ N. În ce sens se va roti tamburul ? Cât ar trebui să fie greutatea corpului B pentru ca tamburul să fie în echilibru ?



6

Pe un disc omogen de carton de rază R = 6 cm, trasăm un cerc interior de rază r = R/2, tangent la conturul discului de rază R. Cu cât se deplasează centrul de greutate al porţiunii rămase din discul iniţial ?

7

O balanţă are braţele pârghiei inegale. Când un corp este cântărit pe talerul din stânga, masa "indicată" este m_1, iar când este cântărit pe talerul din dreapta, masa "indicată" este m_2. Care este valoarea reală a masei corpului ?

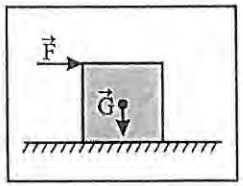
8

Pentru a ridica roţile din faţă ale unui automobil trebuie să acţionăm în mijlocul dreptei ce uneşte axele roţilor cu o forţă de 4 500 N. Care este

greutatea automobilului, dacă aceeaşi operaţie asupra roţilor din spate, necesită o forţă de 3 500 N. Unde se află centrul de greutate al maşinii, dacă distanţa dintre roţi faţă-spate este d = 2,40 m ?

9

Cubul omogen reprezentat în figură trebuie răsturnat prin împingere orizontală (cu forţa $\vec{F}$). Ce valoare minimă trebuie să aibă coeficientul de frecare dintre cub şi suprafaţa orizontală pentru ca răsturnarea să fie posibilă?



10

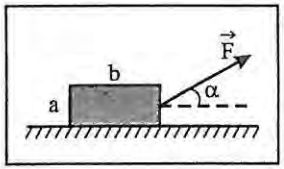
Unde se află centrul de greutate al unei scări neomogene, lungă de 2 m, care poate rămâne în echilibru când este sprijinită de un perete vertical, dacă unghiul format de scară cu podeaua este de cel puţin 45°? Coeficientul de frecare la alunecare cu peretele şi podeaua este $\mu = \sqrt{3}/3$.

11

La ce viteză se poate răsturna un automobil care face un viraj de rază R = 100 m pe o şosea perfect orizontală, dacă centrul său de greutate se află la înălţimea h = 1 m, iar distanţa dintre roţi (stânga-dreapta) este d = 1,5 m?

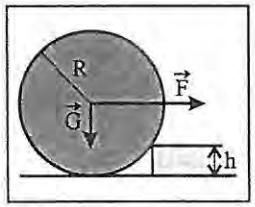
12

O ladă omogenă, având dimensiunile a = 0,5 m şi b = 1 m, este trasă orizontal uniform cu o forţă ce face unghiul α cu orizontala. Coeficientul de frecare la alunecare este μ = 0,4. Pentru ce valoare a unghiului α lada începe să se ridice?



13

Cu ce forţă orizontală minimă trebuie să acţionăm asupra axului roţii omogene reprezentată în figură pentru a o urca pe pragul de înălţime h = 20 cm ? Se cunosc G = 120 N, R = 50 cm. Ce valoare are forţa de frecare dintre roată şi prag în timpul urcării ?

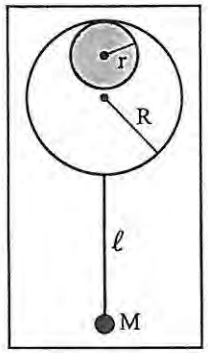


14

O scândură omogenă de masă m şi lungime ℓ este aşezată pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la alunecare μ. La un capăt al scândurii se aplică o forţă orizontală $\vec{F}$, perpendiculară pe scândură. Care e valoarea minimă a forţei $\vec{F}$, necesară pentru ca scândura să se rotească? În jurul cărui punct se va roti în acest caz scândura ?

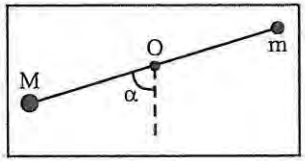
15

Un pendul este format dintr-o tijă de lungime ℓ care are la un capăt o bilă de masă M. La celălalt capăt tija este sudată de un inel de rază R. Inelul şi tija au mase neglijabile. Inelul este aşezat peste un cilindru de rază r < R, care se roteşte uniform în jurul axei sale, orizontale fixe. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare dintre inel şi cilindru μ, să se afle unghiul făcut de tijă cu verticala.



16

O tijă rigidă de masă neglijabilă şi de lungime 2ℓ are sudate la capete 2 bile de mase M şi m (M > m). Ea se poate roti în plan vertical în jurul unui ax, situat în mijlocul ei. Să se exprime, ca funcţii de unghiul α, momentele tuturor forţelor ce acţionează asupra halterei (faţă de axul O) şi energia potenţială a sistemului. Să se arate că energia potenţială este maximă în poziţia de echilibru *instabil* şi minimă în cea de echilibru *stabil*.



TEST

I

Alegeţi afirmaţiile corecte şi reformulaţi-le pe cele incorecte.

a) Un solid rigid are o mişcare de translaţie dacă segmentul determinat de orice pereche de puncte ale sale îşi păstrează direcţia în timpul mişcării.

b) Solidul rigid este în echilibru de translaţie dacă acceleraţia lui este constantă.

c) Un solid rigid este în echilibru de rotaţie în jurul unei axe dacă fiecare punct al său are o traiectorie circulară faţă de acea axă, cu centrul pe axă.

d) Solidul rigid este în echilibru de rotaţie numai dacă nu se roteşte.

e) Un solid rigid are sau mişcare de translaţie sau mişcare de rotaţie. 1,5p

II

Alegeţi varianta corectă şi completaţi enunţurile următoare astfel încât să devină corecte.

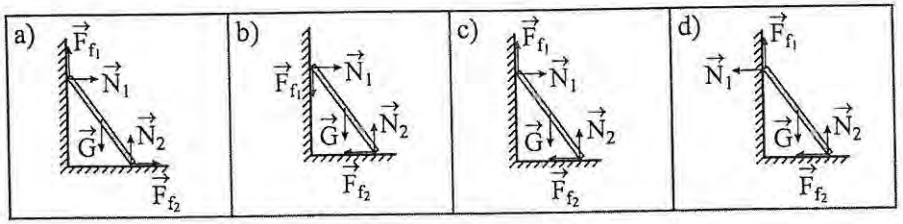
a) Momentul unei forţe faţă de un punct este o mărime *scalară / vectorială.*

b) Mărimea fizică ce măsoară efectul de rotaţie al unei forţe faţă de un punct (axă) este . . . .

c) Momentul unei forțe față de o axă are modulul *maxim / minim* când forța este paralelă cu axa sau când suportul forței intersectează axa.
d) Modulul momentului forței față de un punct este egal cu produsul dintre....
e) Brațul unei forțe față de un pol este.... 1,5p

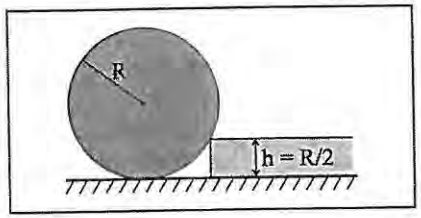
III

O scară omogenă este sprijinită de un perete. Știind că există frecări și cu podeaua și cu peretele, care este reprezentarea corectă a forțelor care acționează asupra scării? 1p



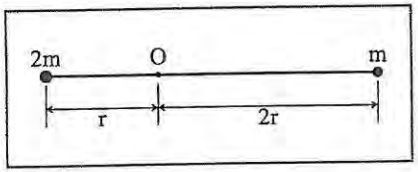
IV

Un cilindru omogen cu raza R trebuie urcat pe un prag cu înălțimea h, acționând asupra lui cu o forță de împingere cât mai mică. Greutatea cilindrului fiind G, iar coeficientul de frecare cu pragul suficient de mare, unde trebuie aplicată această forță și ce valoare are? 2,5p



V

În figura alăturată este reprezentată o halteră orizontală formată din două bile fixate la capetele unei tije rigide, de masă neglijabilă, ce se poate roti fără frecări, în plan vertical, în jurul axului O. Dacă m = 1 kg, r = 0,5 m și $g = 10\ m/s^2$, precizați:



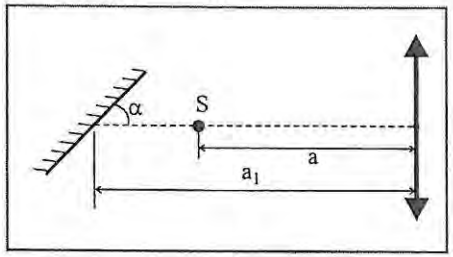
a) momentele greutăților bilelor față de axul O;
b) dacă haltera este în echilibru;
c) valoarea reacțiunii axului asupra halterei;
d) dacă haltera rămâne în echilibru după ce este rotită cu un unghi $\alpha = 60°$;
e) dacă energia potențială a halterei în poziția de la punctul d) este mai mare sau mai mică decât cea din poziția inițială. Ce concluzie trageți? 2,5p

Se acordă un punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute

PROBLEME RECAPITULATIVE

1

O sursă punctiformă de lumină, o lentilă convergentă subțire și o oglindă plană sunt așezate ca în figură. Se cunosc: a = 20 cm, a_1 = 30 cm, $\alpha = 45°$. Lentila formează două imagini ale sursei S. Să se determine distanța dintre aceste imagini, dacă distanța focală a lentilei este f = 5 cm.



2

Un sistem este format dintr-o lentilă convergentă cu distanța focală f, o lumânare și un ecran, plasate perpendicular pe axul optic principal. Inițial lentila este lipită de ecran, iar lumânarea este la distanța d de ecran.
Lentila începe să se deplaseze cu viteza v = 5 cm/s spre lumânare.
a) Se constată că după t_1 = 6 s de la pornirea lentilei se observă imaginea clară a flăcării lumânării și după încă t_1 = 6 s, pe ecran se observă, din nou, imaginea clară a flăcării lumânării. Calculați distanța focală a lentilei și distanța dintre lumânare și ecran.
b) Calculați raportul dimensiunilor celor două imagini clare ce se obțin pe ecran.
c) Se înlătură ecranul și se plasează lentila la d' = 40 cm de lumânare. Unde se formează imaginea formată de lentilă și unde trebuie plasat ochiul unui observator pentru a vedea imaginea respectivă (se presupune ochiul normal)?

3

Obiectivul unui aparat de fotografiat are distanța focală f = 4cm. Ce cursă longitudinală de reglaj trebuie să aibă obiectivul pentru a putea fotografia cu aparatul obiecte aflate la orice distanță mai mare de 60 cm față de aparat?

4

Un camion străbate o anumită distanță cu viteza constantă v_1= 60 km/h și apoi o distanță egală cu viteza constantă v_2= = 40 km/h. Care este viteza medie pe întreaga distanță?

5

Un automobil se deplasează un timp t_1=2h cu viteza constantă v_1=60km/h și apoi un timp t_2=2h cu viteza constantă v_2=90 km/h. Care a fost viteza medie și distanța totală parcursă?

6

Un biciclist parcurge un semicerc de lungime ℓ = 31,4m într-un timp Δt=5s. Să se afle modulul vectorului deplasare și modulul vitezei medii.

7

O piatră a fost aruncată, pe orizontală, din vârful unui turn, cu viteza inițială v_0 = 40m/s. Neglijând frecările și considerând $g = 10 m/s^2$ calculați ce viteză va avea piatra dupa Δt = 3s.

8

Două particule se mişcă în plan cu vitezele constante $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, iar la momentul iniţial vectorii de poziţie sunt $\vec{r}_{01}$ şi $\vec{r}_{02}$. Să se arate că întâlnirea celor două particule este posibilă numai dacă $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02}) \uparrow\downarrow (\vec{v}_1-\vec{v}_2)$.

9

Două corpuri au fost aruncate simultan din vârful unui turn sub unghiuri diferite şi cu viteze diferite. Neglijând frecările arătaţi că mişcarea unui corp faţă de celălalt este rectilinie uniformă (până când unul dintre corpuri atinge solul).

10

Vectorul de poziţie al unui mobil variază după legea $\vec{r}(t) = c \cdot t \cdot \vec{i} - b \cdot t^2 \cdot \vec{j}$, unde c şi b sunt constante strict pozitive. Să se deducă $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ şi relaţia dintre coordonatele mobilului (ecuaţia traiectoriei).

11

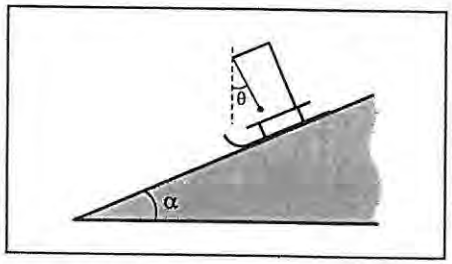
O minge de masă m=100g este aruncată pe direcţie oblică şi întâmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă, care la înălţimea maximă are valoarea R=1N. Considerând $g=10 m/s^2$ să se afle unghiul dintre vectorii viteză $\vec{v}$ şi acceleraţie $\vec{a}$ în acel moment.

12

Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil şi imponderabil care are legate la capete un corp de masă M şi o scară pe care se află un sportiv de masă m. Sistemul este iniţial în repaus. Cu ce acceleraţie, faţă de scară, trebuie să se mişte sportivul astfel încât firul să nu apese asupra scripetelui?

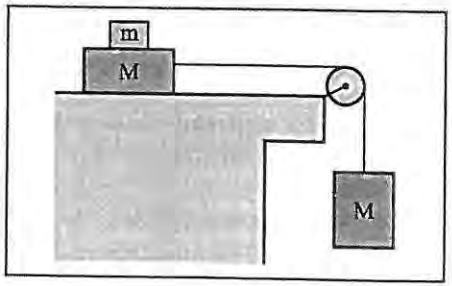
13

Pe un plan înclinat de unghi α faţă de orizontală alunecă, fără frecare, o sanie care are fixat pe ea un suport, iar de aceasta este legat un fir cu bilă la celălalt capăt. Ce unghi θ face firul cu verticala, când bila este în repaus faţă de sanie (în timpul coborârii saniei)?



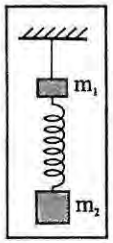
14

Corpurile reprezentate în figura de mai jos, legate prin firul inextensibil şi imponderabil, se pot mişca fără frecare. Dacă m nu alunecă faţă de M, iar scripetele este ideal să se afle:
a) acceleraţia sistemului;
b) coeficientul de frecare minim necesar între m şi M pentru ca el să nu alunece faţă de acesta.



15

Sistemul reprezentat în figură este în echilibru. La un moment dat firul ce leagă corpul de masă m_1 de tavan se rupe. Ce acceleraţie are corpul de masă m_1 imediat după ruperea firului?



16

Un cilindru gol în interior de rază R=1m se rostogoleşte astfel încât axa să se mişte uniform accelerat cu $a=5 m/s^2$. În interior se află un mic corp care are coeficientul de frecare la alunecare cu suprafaţa cilindrului $\mu = 0,5$.
La ce înălţime se va găsi acest corp faţă de sol?

17

Prima viteză cosmică pentru o planetă sferică de secţiune transversală S este v_1. Să se afle densitatea medie a planetei.

18

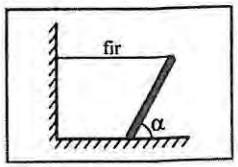
Să se găsească a doua viteză cosmică pentru Pământ (viteza cu care trebuie lansat de pe Pământ un corp astfel încât, în absenţa frecărilor să părăsească câmpul gravitaţional al Pământului).

19

Un om trage, pe o suprafaţă orizontală, o sanie de masă m. Dacă unghiul de frecare la alunecare este φ să se afle sub ce unghi α faţă de orizontală trebuie aplicată forţa de tracţiune astfel încât efortul omului să fie minim? Cât este în acest caz forţa de tracţiune?

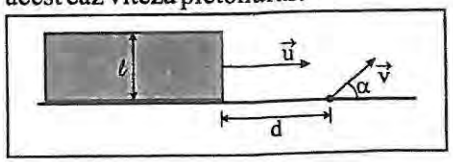
20

Să se afle coeficientul de frecare static minim dintre scândura omogenă reprezentată în figură şi podea, pentru ca scândura să fie în echilibru.



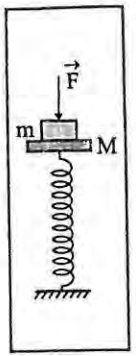
21

Un automobil cu lăţimea $\ell = 2$ m se deplasează cu viteza constantă u = 10 m/s pe lângă bordura străzii.
Un pieton, aflat chiar pe bordură, se angajează în traversarea străzii când faţa automobilului se află faţă de el la o distanţă $d = 2\sqrt{3}$ m.
Ce unghi α trebuie să facă direcţia mişcării pietonului cu bordura pentru ca, mişcându-se uniform cu o viteză minimă, să nu fie lovit de automobil?
Ce valoare minimă trebuie să aibă în acest caz viteza pietonului?



22

Cu ce forţă minimă, verticală, trebuie împins, lent, corpul de masă m pentru ca după încetarea bruscă a acţiunii forţei $\vec{F}$ corpul m să se desprindă de corpul M? Se presupune că resortul rămâne tot timpul vertical şi că înainte de aplicarea forţei $\vec{F}$ întregul sistem era în repaus.



TEST RECAPITULATIV

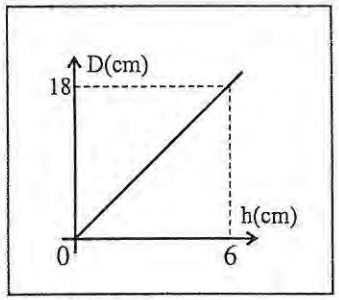
1

Dacă o lentilă convergentă, aflată la distanța 2f față de un obiect real, se apropie cu f/2 de obiect, dimensiunea imaginii:

A) crește de două ori
B) crește de patru ori
C) scade de două ori
D) scade de patru ori

2

Un disc circular plutește pe suprafața lichidului dintr-un vas. O sursă punctiformă de lumină se află la fundul vasului pe aceeași verticală cu centrul discului. În figura alăturată este reprezentată dependența diametrului minim al discului de adâncimea lichidului, pentru care sursa de lumină nu poate fi văzută de deasupra vasului. Valoarea aproximativă a indicelui de refracție al lichidului este:



A) 1,5
B) 1,2
C) 1,6
D) 1,8

3

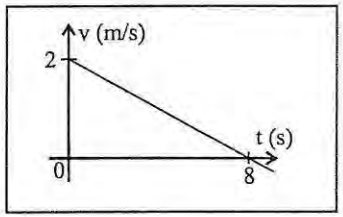
Dacă vectorul viteză și vectorul accelerație sunt coliniari mișcarea punctului material este :

A) rectilinie
B) circulară
C) rectilinie uniform variată
D) rectilinie uniformă

4

Legea vitezei unui punct material aflat în mișcare rectilinie este reprezentată în graficul alăturat.

Notați în spațiile libere (____) litera corespunzătoare răspunsului corect.



I. Tipul mișcării: (____)
II. Viteza inițială:(____)
III. Acceleratia: (____)
IV. Distanta parcursa în primele 8 secunde : (____)

A) uniformă;
B) uniform accelerată;
C) uniform încetinită;
D) uniform încetinită până la oprire;
E) 8 m/s
F) 2 m/s
G) 16 m
H) 8 m
I) 4 m/s^2
J) −4 m/s^2
K) 0,25 m/s^2
L) −0,25 m/s^2

5

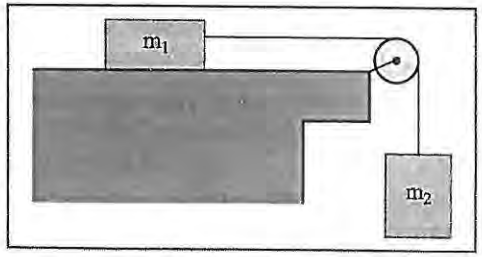
Relația corectă dintre constanta elastică a unui fir și modulul său de elasticitate este:

A) $k = \frac{E \cdot S_0^2}{\ell_0}$
B) $k = \frac{E \cdot \ell_0}{S_0}$
C) $k = \frac{E \cdot S_0}{\ell_0}$
D) $k = \frac{E^2 \cdot S_0}{\ell_0}$

6

Corpurile reprezentate în figura alăturată au masele: $m_1 = m_2 = 1$ kg. Corpul m_1 se mișcă cu frecare de coeficient $\mu = 0{,}2$.

Considerând g = 10 m/s^2, valoarea accelerației corpurilor și tensiunea din firul considerat ideal sunt:



A) 3 m/s^2; 5 N
B) 2 m/s^2; 8N
C) 4 m/s^2; 6N
D) 5 m/s^2; 4 N

7

Care din următoarele afirmații este falsă:

A) Forța maximă de frecare statică este mai mică decât forța de frecare la alunecare.

B) Forța de frecare la alunecare depinde de natura suprafețelor aflate în contact și de gradul de prelucrare.

C) Forța de frecare la alunecare nu depinde de aria suprafețelor de contact dintre corpuri.

D) Forța de frecare la alunecare nu depinde practic de viteza relativă a corpurilor aflate în contact, cât timp aceasta este mică.

8

Expresia matematică a legii atracției universale este:

A) $\vec{F} = -k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}$
B) $\vec{F} = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}$
C) $\vec{F} = -k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{r}$
D) $\vec{F} = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{r}$

9

Lucrul mecanic al unei forțe constante $\vec{F}$ care își deplasează punctul de aplicație pe distanța d, în lungul unei drepte care face unghiul α cu direcția forței, este egal cu:

A) $L=\vec{F}\times\vec{d}$ B) $L=F\,d\sin\alpha$ C) $L=F\,d\,tg\,\alpha$ D) $L=F\,d\cos\alpha$

10

Care din următoarele afirmații este falsă:

A) Randamentul mecanic este egal cu raportul dintre puterea utilă și puterea consumată.

B) Randamentul unui plan înclinat depinde de masa corpului.

C) Randamentul mecanic este o mărime adimensională.

D) Randamentul unui plan înclinat depinde de unghiul planului.

E) Randamentul mecanic este subunitar.

11

Alegeți afirmațiile corecte :

A) Energia cinetică a unei particule este zero și impulsul său este diferit de zero.

B) Dacă se dublează viteza unei particule impulsul și energia sa cinetică se dublează.

C) Dacă se dublează viteza unei particule impulsul său se dublează iar energia sa cinetică crește de patru ori.

D) Vitezele a două corpuri cu mase egale, după ciocnirea lor elastică sunt egale.

E) Momentul unei forțe a cărei direcție este perpendiculară pe axa de rotație este nul.

12

Care sunt unitățile de masură în S.I., pentru masă, impuls și respectiv, energie:

A) kg; kg · m; J B) g; kg · m/s; J C) kg; kg · m/s; J D) kg; N·s; J

13

Care din următoarele afirmații sunt adevărate:

A) Dacă momentul rezultant al forțelor ce acționează asupra unui corp este nul, corpul nu are mișcare de translație.

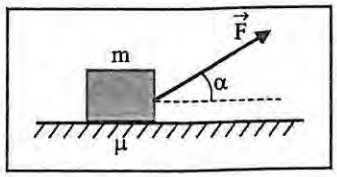
B) Corpul solid este în echilibru de rotație dacă în raport cu un S.R. este în repaus.

C) Condiția de echilibru de rotație este ca suma momentelor forțelor să fie nulă.

D) Un corp nu este în echilibru dacă verticala din centrul său de greutate cade pe suprafața bazei sale de sprijin.

14

Corpul reprezentat în figură este în repaus. Care este valoarea maximă a forței $\vec{F}$ pentru care corpul rămâne în repaus?



A) $F=\mu\cdot m\cdot g(\cos\alpha+\mu\cdot\sin\alpha)$

B) $F=\mu\cdot m\cdot g/(\cos\alpha+\mu\cdot\sin\alpha)$

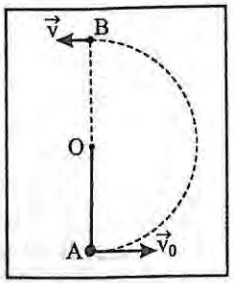
C) $F=\mu\cdot m\cdot g/\cos\alpha$

D) $F=\mu\cdot m\cdot g/(\cos\alpha-\mu\cdot\sin\alpha)$

F) $F=\mu\cdot m\cdot g\cos\alpha$

15

O bilă prinsă de un fir este lovită când este în poziția de echilibru. Dacă lungimea firului care o susține (prins în punctul O) este ℓ = 1m, mișcarea se face fără frecări, g = = 10m/s^2, iar viteza la trecerea prin punctul B este v = 3 m/s, viteza de lansare din punctul A este:



A) $v_0=10$ m/s B) $v_0=5$ m/s

C) $v_0=7$ m/s D) $v_0=8$ m/s

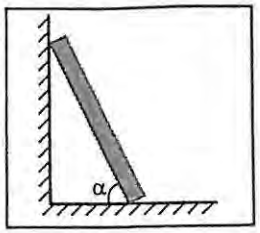
16

Un obuz aflat în repaus pe o suprafață orizontală explodează în două fragmente cu masele $2m_1=m_2=10$ kg. Dacă primul fragment are viteza $v_1=200$ m/s, energia cinetică a celuilalt este:

A) $E_{c_2}=40$ kJ B) $E_{c_2}=50$ kJ C) $E_{c_2}=60$ kJ D) $E_{c_2}=30$ kJ

17

Scara reprezentată în figură prezintă frecări atât cu peretele cât și cu podeaua, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu_c=\mu_s=\mu$. Unghiul minim α pentru care scara rămâne în repaus este:



A) $\alpha=\text{arctg}\dfrac{1-\mu}{2}$ B) $\alpha=\text{arctg}\dfrac{\mu}{2}$

C) $\alpha=\text{arctg}\dfrac{1-\mu^2}{2\mu}$ D) $\alpha=\text{arctg}\dfrac{1-\mu}{1\ \ \mu}$

RĂSPUNSURI

pag. 21: 1. a) 20 m; b) 60 m; **3.** 2α; **4.** 13,8 cm; **5.** $x_2 = 1{,}71$ cm; $\beta = 0{,}143$; **6.** $\simeq 3{,}6$ cm; **7.** a) 9,88 cm; b) 5 cm; **8.** $R = -19{,}4$ cm, oglindă concavă; $y_2 = -15$ cm, imagine reală răsturnată mai mare decât obiectul; **9.** $y_2 = 6$ cm; $x_1 = -4/3$ cm; $x_2 = 4$ cm; **10.** a) $\beta = 3$; b) la 30 cm în spatele oglinzii; **11.** mai sus; indicele de refracție al apei este mai mic decât al aerului deci unghiul de refracție este mai mare decât unghiul de incidență.

12. a) $d = \frac{H}{2}\left(\operatorname{tg} i + \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right)$ b) $h = \frac{H(\cos i - 3\sqrt{n^2 - \sin^2 i})}{4(\cos i - \sqrt{n^2 - \sin^2 i})}$; **13.** $\sin r = 0{,}571$; $r \simeq 35^0$;

14. a) $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\beta = 55^0$; b) $\cos\frac{\theta}{2} = 0{,}75$; $\theta \simeq 83^0$; **15.** $n = \sqrt{3}$; **16.** 2,66 m; **17.** a) $n = 1{,}46$;

b) $R = 16{,}3$ cm; **18.** $\delta = \frac{\pi}{2} - \ell$; **19.** a) $\sin r = \frac{\sin i}{n_a}$; $r = 32^0$; b) nu variază; **20.** 1,13 m; **21.** $n_{sticlă} \geq 1{,}41$;

$i < l' \Rightarrow$ o parte din lumină se refractă; **22.** $n' = 1{,}3$;

pag. 31: 1. Lentila care mărește; **3.** $f > 7$cm $\Rightarrow$ o imagine virtuală; **4.** poziția 1; $|x_1| > 2f \Rightarrow f < x_2 < 2f$;
5. a) $C = 25\delta$: b) nu, imaginea este virtuală, dreaptă mai mare decât obiectul; **6.** poziția 3; **7.** b) $f = 25\delta$;
c) $x_2 = 6$ cm; $y_2 = -0{,}5$ cm; **8.** b) $C = \frac{100}{7}\delta$; c) $x_2 \simeq 23{,}(3)$ cm; $y_2 \simeq -2{,}3$ cm; **9.** $f = 6$ cm; **10.** $x_2 = 1$ m;
$y_2 = -y_1$; $x_2 = +\infty$; **11.** a) $x_1 = -12$ cm; $x_2 = 48$ cm; b) $f = 9{,}6$ cm; **12.** $x_1 = -20$ cm; $x_2 = 80$ cm (imagine reală)
$x'_1 = -12$ cm; $x_2 = -48$ cm (imagine virtuală); **13.** a) 12 cm; 6 cm; b) $\beta_1 = -2$; $\beta_2 = -1/2$; **14.** a) $f_1 = 20$ cm;
$f_2 = -80/3$, divergentă; c) $\beta = 1{,}6$; **15.** $x'_2 = -16/3$ cm (față de L_2); $y'_2 = -y/3$; **16.** $x'_2 = -50$ cm (față de L_2; în același loc cu obiectul) $\beta = -5$.

pag. 42: 4. a) 5,3 cm; b) $C = -10\delta$; **5.** hipermetropul; **6.** $C = -4\delta$; **7.** $C = +1{,}5\delta$; **8.** b) $f = 5$ cm; c) se poate modifica distanța de la lentilă la placa fotografică, d) $x_2 \simeq 5$ cm; **12.** $P = 1296\,\delta$; $G = 324$; $d = 16{,}85$ cm;
13. a) $|x_1| \cong 0{,}619$ cm; b) $\beta_1 = -32{,}3$; c) $P = 5388\,\delta$; d) $G = 1347$.

pag. 44: I. a) mai sus; mai mare; b) îndepărtate; în fața; cristalinului; c) nu au, pot fi meniscuri convergente sau divergente; **II.** 1) A; 2) A; 3) C; **III.** $\frac{d\sqrt{7}}{6}$; **IV.** virtuală, la 60 cm în fața lentilei L_2, $y'_2 = -6y_1$;

pag. 51: 4. a) direcția; b) modulul; c) direcția și modulul; **5.** tabăra se află la polul N, ursul este alb; **6.** b) $x_T = -800$ m; $y_T = 600$ m; d) $r = 1000$ m; e) $d = 3800$ m $> r$; **7. A.** a) $r_1 = 500$km; **B.** a) $TT' = 1000$km; b) $x'_1 = -1100$ km; $y'_1 = 1000$km; c) $x_2 = 925$km; $y_2 = 400$km; $x'_2 = 125$km; $y'_2 = 1000$km **8. B.** b) 10km; c) $r = 5\sqrt{2}$km; d) $D = VA + AN \cong 6{,}82$km; **C.** a) $PN = 4$km; b) $x'_P = 0$; $Y'_P = -4$; **9.** a) 70,65cm; c) 330^0; 259cm.

pag. 64: 2. mișcarea rectilinie, în care $\vec{v}$ nu-și schimbă sensul; **3.** a) 13 cm; b) 12 cm sau 5 cm (în funcție de sensul de mișcare); **4.** a) 0; b) 20 m; **5.** $D = \frac{4+\pi}{2}d$; $\Delta r = 2d\sqrt{2}$; $v_m = \frac{4\sqrt{2}v}{4+\pi}$; **6.** $v \simeq 5{,}24$ m/s $= 18{,}86$km/h;
7. $v_1 = 5{,}73$ m/s; $v_2 = 5{,}69$ m/s; **8.** $v \simeq 8{,}79$ m/s $= 31{,}67$km/h; **9.** $x = 75t$; **10.** $x_2 = 50$ cm; **11.** $r_1 = 6{,}4$ m; $r_2 = 13$ m;
12. a) $\Delta x = 84$ cm; b) $v = 28$ cm/s; **13.** $|v| = \frac{hd}{vt^2}$; **14.** $t = 25$ s; $x_1 = x_2 = 375$ m; **15.** a) $v_2 = 57$km/h; b) C_2; cu 30 m în fața liniei de sosire; **16.** a) $t = 13$s; b) $x_A = 325$ m; **17.** a) $x = 10^4 + \frac{25}{18}t$ (m); $v = \frac{25}{18}$ m/s; **18.** $t = 3$h; $x_1 = 150$ km (față de A); **19.** a) 25s; b) 20s; **20.** $t = 33{,}(3)$s; $x = 13{,}(3)$ m; $r = 16{,}(6)$ m;

pag. 72: 2. $a = 0{,}5$ m/s^2; **3.** $v_2 = 5$ m/s; **4.** a) 1 m/s^2; b) $t = 20$s; **5.** a) 1m/s^2; **6.** a) $t = 6$s; $v = 0$; $x = 10$ m; b) (0,3)s - mișcare rectilinie uniformă, (3,9)s - mișcare rectilinie uniform variată, (9,14) s - mișcare rectilinie uniformă;
7. a) $t_m = 5$s; $x_m = -9$ m; b) $a = 2$ m/s^2; **9.** $\omega = 0{,}3$ rad/s; $\upsilon = 47{,}77$ mHz; **10.** $|v| = 30$ km/s; **11.** $\upsilon = 40$ Hz;
12. $\upsilon = 5$ Hz;

pag. 74: I. a); b); d); **III.** b); c; **IV.** $v_m = 5\sqrt{2}$ m/s; **VI.** a); c); e);

pag. 83: 1. Da; Nu este deviat în sens opus accelerației; **2.** Nu; **3.** Barca trebuie să aibă masa cât mai mare pentru a avea viteza cât mai mică și deplasarea sa față de mal cât mai mică; **5.** $G = 600$ N; $F = 720$ N; **6.** $F = \frac{mv}{\Delta t}$;
7. $F_1 = 4{,}6$ kN; $F_2 = 4{,}0$ kN; $F_3 = 3{,}6$ kN; **8.** $v_0 = 30$ m/s; **9.** $a_{min} = g\frac{d}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$; **10.** $a_b = (1 + m/M)g$;

pag. 84: 1. a); **3.** b); d); **4.** $a = 2$ m/s^2; crește; **5.** c); **6.** $a = 2$ m/s^2; $f_2 = 4$N;

pag. 94: 1. $E = 4{,}19 \cdot 10^8$ N/m^2; **2.** $d = 1{,}94$ cm; **3.** $\ell = (\frac{1}{2E}\rho g\ell_0 + 1)\ell_0$ **4.** $\Delta\ell = \Delta\ell/4$; **5.** $a_1 = \frac{20}{11}$ m/s^2 în jos; $a_2 = \frac{10}{11}$ m/s^2 în sus; **6.** $T = \frac{M_2 + (1-f)m}{M_1 + M_2 + m} \cdot F$; **7.** a) $T = 4$N; b) $a_{1,2} = 6$ m/s^2;

pag. 105: 1. $F_f = 10$N; **2.** a) $a_1 = 0$; b) $a_2 = 2$ m/s^2; **3.** a) $k = 200$ N/m; b) $a = 4$ m/s^2; **4.** $8N < F < 40N$;
5. $a_2 = \frac{a_1(1-2\mu)}{2-\mu} = \frac{a_1}{8}$; **6.** $T_k = \frac{n-k+1}{n} \cdot F$; $k = \overline{1,n}$ (vagonul 1 este lângă locomotivă);

7. Dacă $F \leq F_0 = \mu mg(1 + m/M)$; $a_1 = a_2 = \frac{F}{M+m}$ Dacă $F > F_0$: $a_1 = \frac{F}{m} - \mu g$ și $a_2 = \frac{\mu mg}{M}$;

pag. 114: 1. $F = 4{,}2 \cdot 10^{23}$ N; **2.** $x = d/8 = 48000$km (în afara segmentului PL); **3.** $\frac{g_1}{g_2} = \frac{k}{n^2}$;
4. $x = \frac{d}{10} = 38400$ km; **5.** $h \simeq 16{,}26$km; **6.** a) $\alpha = 120^0$; b) $\Gamma = \sqrt{3}$ N/kg; $F = 3$N;

pag. 115: 2. b); d); **3.** c); **4.** c); **5.** c); **6.** $a = 2$ m/s^2; $T = 8$N;

pag. 131: 2. 7,2 kJ; **3.** $L_1 = 0$; $P_1 = 0$; $L_2 = 1200$ J; $P_2 = 20$ W; $L_3 = -2400$ J; $P_3 = 40$ W; **4.** a) $\mu = 8/19$;
b) $L_{F_f} = -9600$ J; $L_F = 9600$ J; c) $P = 160$ W; **5.** $L_G = -1600$ J; $L_N = 1760$ J; **6.** a) $F_c = 20{,}675$ J; $F_u = 29{,}325$ N;
$L_{F_c} = -3101{,}25$ J; $L_{F_u} = 4398{,}75$ J; $L_{f_u} = L_{f_c} = -648{,}75$ J; **7.** $L_G = 432{,}5$ J; $L_{R_B} = 0$; $L_{R_A} = 0$; $L_f = -100$ J;
8. $R = 1$kN; $L = 200$MJ; **9.** $L_G = -0{,}49$ J; $L_T = 0$; **11.** $L_{G_1} = -mga$; $L_{G_2} = Mga$; **12.** $L_G = -2mgR$; **13.** $L_2 = 30$ J;
14. $L_e = -0{,}5$ J; $F_m = 25\pi \cdot N$; **16.** a) $F = 900$ N; b) $P = 1350$W; c) $L = 1800$ J; **17.** $L_{AB} \simeq 8{,}4 \cdot 10^{27}$ J;
18. $L_R = -6$ MJ; **19.** $F = 11$ kN; $L_F = 220$ kJ; $P_m \simeq 24{,}6$ kW;

pag. 141: 1. $h_m = \frac{v_0^2}{2g}$; $x_m = \frac{v_0^2}{2\mu g}$; **2.** $\mu = 0{,}21$; **3.** $F = 2{,}2$ N; **4.** $\alpha = 60^0$; **5.** $F_r = 7999{,}8$ N; **6.** $h = 2$m față de baza emisferei;

pag. 142: I. a); b); e); **II.** 1. c); 2. d); **III.** 1. d); 2. c); **IV.** a) $L = 36$ J; b) $v = 6$ m/s; **V.** $v = \sqrt{2gh}$; $\mu = \frac{h}{d}$;

pag. 162: 1. $E_1 = 1250$ J; $E_2 = 125$ J; **2.** $P = 420$ W; $\Delta E_P = 8400$ J; **3.** $E_{P_1}/E_{P_2} = 2$; **4.** $E_{P_1} = 37500$ J;
$\Delta E_P = 35250$ J; **5.** $w_p = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$; **6.** $v_1 = \sqrt{\frac{g\ell}{2}}$; $v_2 = \sqrt{g\ell}$; **7.** $Q_v = 1$m^3/s; **8.** $\eta = 93{,}75$ %;
9. $\eta = 63{,}39$ %; **10.** $v = \sqrt{\frac{2gl}{3}}$; **11.** $y = 20$ cm; **12.** $x_2 = \sqrt{2}$ cm; **13.** $v = 9{,}12$ km/s; **14.** $N_x = mg\cos\alpha(3\sin\alpha - 2)$
pentru $\alpha > \arcsin(2/3)$; $N_x = 0$, pentru $\alpha \leq \arcsin(2/3)$; **15.** $y = x$ (deasupra poziției de echilibru); $a_0 = \frac{kx}{m}$ (în sus); $v_{max} = x\sqrt{\frac{k}{m}}$; **16.** a) $F_{min} = (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g$; b) $F_{min} = (\mu_1 m_1 + \frac{1}{2}\mu_2 m_2)g$;

pag. 164: I. b); c); **II.** a) este constantă; b) scade; c) (1); d) este; **III.** a); c); d); e); **IV.** c); **V.** c); **VI.** 0,25.

pag. 175: 1. $p = 2 \cdot 10^4$ N · s; **2.** $p = 2 \cdot 10^5$ N · s; a) $v_1 = 40$ m/s; b) $v_2 = 20\sqrt{2}$ m/s; **3.** a) $p_1 = 31{,}4$ N · s; b) 0;
4. a) $\Delta p = 16$ N · s; b) $F_m = 8 \cdot 10^3$ N; **5.** $v = 15$ m/s; **6.** a) 14,1 N · s; b) 20 N · s; **7.** b) $t = 3 \cdot 10^{-3}$ s; c) $H = 0{,}6$ N · s;
d) $m = 2$ g; **8.** $F_m = 500$ kN; $p_m = 125 \cdot 10^5$ N/m^2; **9.** $v_2 = 0{,}1$ m/s; **10.** a) $F_m = 2$ kN; $F'_m = 1$ kN; **11.** $a = 8 \cdot 10^5$ m/s^2;
$F = 4 \cdot 10^4$ N; $H = 20$ N · s $= p_0$; **12.** $m_1 = m_2$; **13.** $v' = 2{,}4$ km/h; **14.** $v'_1 = -6$ m/s; $v'_2 = 0$; $F_m = 48$ kN;
15. a) $v_{max} = 2$ m/s; b) $\mu = 0{,}5$; c) $d_{max} = 8$ m; **16.** $v_0 = 10$ m/s; **17.** $|\Delta p| = 3$ N · s; $Q = 1{,}5$ J; **18.** $v' \cong 7$ m/s;
$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}926$; $\alpha \cong 43°$; **19.** $v_1 = 400$ m/s; $v_2 = 200$ m/s; **20.** $F_m = 7700$ N; **21.** $H = 500$ m; **22.** $v' = 5$ m/s; $P = 10$ N·s;
$E_c = 50$ J; **23.** $v'_1 = 2{,}5$m/s; $Q = 2{,}25$J; **24.** $v_1 = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} \cdot v_0$; $v_2 = mv_0\sqrt{\frac{2}{M(M+m)}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$.

pag. 178: II. a); c); **III.** b); **IV. A.** c); **B.** d).

pag. 195: 1. $F = 17{,}3$ N; **2.** $F = 6$ N; **3.** $T_1 = 10{,}3$ N; $T_2 = 14{,}6$ N; $T_3 = 20$ N; **4.** $M_A = M_B = 20\sqrt{3}$ N/m; $M_C = 0$
5. în sens trigonometric $G_B' = 40$ N; **6.** $x = 1$ cm; **7.** $m = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$; **8.** $G = 8000$ N; la 1,05 m față de axa roților din față;
9. $\mu_{min} = 1/2$; **10.** $d = 1{,}366$ m față de capătul inferior; **11.** $v_r = 98{,}59$ km/h (dacă $\mu > 0{,}75$); **12.** $\alpha = \operatorname{arctg}3$;
13. $F = 160$N; $F_f = 0$; **14.** $F = (\sqrt{2} - 1)\mu mg$; $x = \sqrt{2}\,\ell/2$; **15.** $\sin\alpha = \mu R/(\ell + R)\sqrt{1 + \mu^2}$; **16.** $E_{pmax} = 2Mg\ell$;
$E_{pmin} = 2mg\ell$.

pag. 197: I. a); **III.** c); **IV.** $F_{min} = \sqrt{3}G/4$; **V.** a) $M_1 = M_2 = 10$ N · m; b) da; c) $R = 30$ N; d) da; e) E_p = const.

pag. 199: 1. 1,2 cm; **2.** a) $d = 90$ cm; $f = 20$ cm; b) $y_2/y'_2 = 1/4$; c) ochiul trebuie plasat după imagine (la o distanță mai mare de 40 cm de lentilă); **3.** $\Delta x = 2{,}86$ mm; **4.** 48 km/h; **5.** 70 km/h; $d = 210$ km; **6.** 20 m; 4 m/s;
7. 50m/s; **10.** $\vec{v}(t) = c\vec{i} - 2bt\vec{j}$; $\vec{a}(t) = -b\vec{j}$; $y = -bx^2/c^2$(parabolă). **11.** $\alpha = 135°$; **12.** $a = 2Mg/m$; **13.** $\theta = \alpha$;
14. $a = Mg/(2M + m)$; $\mu_{min} = M/(2M + m)$; **15.** $a_1 = g(1 + m_2/m_1)$; **16.** $h = 0{,}4$ m; **17.** $\rho = 3v_1^2/4kS$;
18. $v_{II} = v_I\sqrt{2} = 11{,}2$ km/s; **19.** $\alpha = \varphi$; $F_{min} = mg\sin\varphi$; **20.** $\mu_s > (\operatorname{ctg}\alpha)/2$; **21.** $\alpha = 60°$; $v_{min} = 5$ m/s.

1. A; **2.** B; **3.** A; **4. I.** C; **II.** F; **III.** L; **IV.** H; **5.** C; **6.** C; **7.** A; **8.** A; **9.** D; **10.** B; **11.** C; **12.** C; D; **13.** B; C; **14.** B; **15.** C; **16.** B; **17.** C.

CUPRINS

1.OPTICA GEOMETRICĂ 3
Principiile opticii geometrice 4
Reflexia şi refracţia luminii 5
Legile reflexiei 6
Oglinzi sferice 7
Legile refracţiei 13
Reflexia totală (extindere) 14
Prisma optică 17
Probleme 21
Lentile subţiri 24
Asociaţii de lentile 30
Probleme 31
Ochiul 34
Defecte de vedere 35
Instrumente optice 36
Aparatul de fotografiat 37
Microscopul 40
Probleme 42
Test 44
2.PRINCIPII ŞI LEGI ÎN MECANICA NEWTONIANĂ 45
Mişcare. Repaus 46
Probleme 51
Viteză. Vectorul viteză 53
Legea mişcării rectilinii uniforme (f) 57
Mişcarea circulară uniformă 60
Probleme 64
Acceleraţia. Vectorul acceleraţie 67
Legile mişcării rectilinii uniform variate 69
Probleme 72
Test 74
Principiile mecanicii 75
Principiul I al mecanicii 75
Principiul al II-lea al mecanicii 77
Principiul al III-lea al mecanicii 80
Probleme 83
Test 84
Legea lui Hooke. Tensiunea în fire 85
Deformarea elastică 85
Legea lui Hooke 85
Forţa elastică 89
Tensiunea într-un fir 91
Probleme 94
Legile frecării la alunecare 95
Forţa de frecare la alunecare 95
Legile frecării la alunecare 96
Frecarea în viaţa practică 101
Probleme 105
Legea atracţiei universale 106
Câmpul gravitaţional 107
Intensitatea câmpului gravitaţional 109
Probleme 114
Test 115
3.TEOREME DE VARIAŢIE ŞI LEGI DE CONSERVARE ÎN MECANICĂ 116
Lucrul mecanic. Puterea 118
Lucrul mecanic 118
Puterea mecanică 121
Lucrul mecanic al forţei gravitaţionale 125
Lucrul mecanic al forţei elastice 128
Lucrul mecanic al forţei de frecare la alunecare 130
Probleme 131
Teorema variaţiei energiei cinetice a punctului material 135
Energia mecanică 135
Energia cinetică 136
Probleme 141
Test 141
Energia potenţială 143
Energia potenţială gravitaţională 143
Energia potenţială elastică (extindere) 145
Legea conservării energiei mecanice 146
Legea variaţiei energiei mecanice totale 153
Randamentul mecanic 156
Probleme 162
Test 164
Teorema variaţiei impulsului (facultativ) 166
Impulsul punctului material 166
Legea conservării impulsului unui sistem de două puncte materiale 168
Ciocniri (facultativ) 171
Probleme 175
Test 178
4. ELEMENTE DE STATICA 179
Mişcarea de translaţie. Mişcarea de rotaţie 180
Echilibrul de translaţie. Condiţii de echilibru 182
Echilibrul de rotaţie 183
Efectul de rotaţie al unei forţe 183
Echilibrul corpurilor şi energia potenţială 191
Probleme 195
Test 197
Probleme recapitulative 199
Test recapitulativ 202
Răspunsuri 206

Format: 16/70×100. Coli de tipar: 13
Bun de tipar: 19.06.2006

Tiparul executat la Imprimeria „Oltenia" – Craiova
Str. Dr. Nicolae Ionescu Siseşti, nr. 21
Comanda 48